DER HYDROMAGNETISCHE DYNAMOMECHANISMUS IN DER GESCHICHTETEN IONOSPHÄRE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

LOTHAR GRELLMANN

aus

GUMMERSBACH / Rhld.

BONN 1980

DER HYDROMAGNETISCHE DYNAMOMECHANISMUS IN DER GESCHICHTETEN IONOSPHÄRE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

LOTHAR GRELLMANN

aus

GUMMERSBACH / Rhld.

BONN 1980

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

1. Referent : Prof. Dr. H. Volland
2. Referent : Prof. Dr. O. Hachenberg

Tag der mündlichen Prüfung : 21.April 1980

Institut für Radioastronomie der Universität Bonn
Direktor : Prof. Dr. O. Hachenberg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Druck: Rheinische Friedrich - Wilhelms - Universität, Bonn

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung 5

1.Einleitung 7

2.Modell eines hydromagnetischen Dynamos 12

3.Erweiterung des hydromagnetischen Dynamo-Modells 26

4.Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems 58

5.Energie der Wellenmoden 76

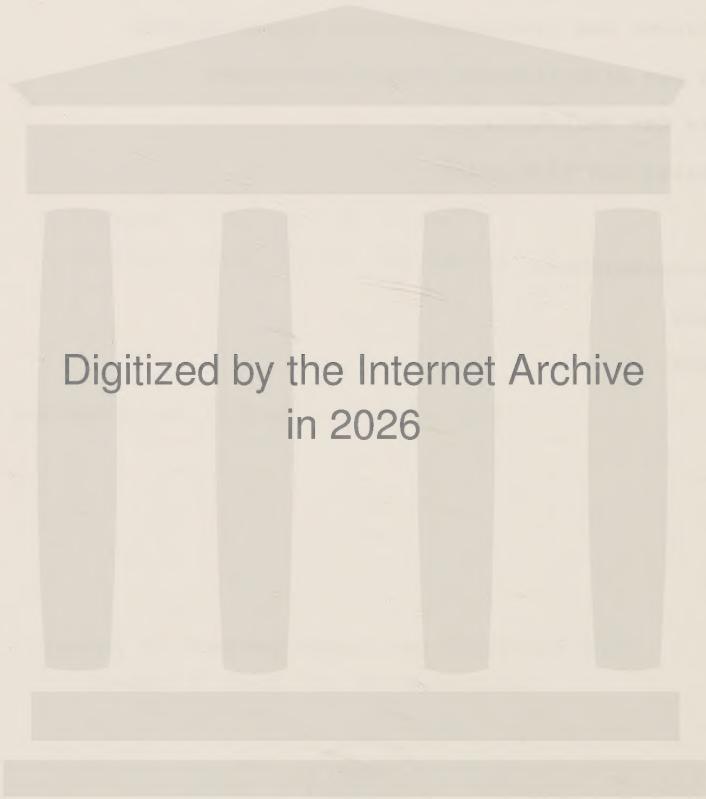
6.Ergebnisse und Diskussion 85

Anhang 115

Literaturverzeichnis 152

Danksagung

Lebenslauf


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546501_0019

Zusammenfassung

Die periodische Wärmeeinstrahlung der Sonne regt die Atmosphäre der Erde zu Eigenschwingungen an, die insbesondere für das dynamische Verhalten der Thermosphäre von großer Bedeutung sind. Die mit diesen atmosphärischen Gezeitenwellen verbundenen Windsysteme treiben in ionosphärischen Höhen die Plasmakomponente quer zu den geomagnetischen Feldlinien und erzeugen über den Dynamoeffekt globale elektrische Felder und Stromsysteme. Das Magnetfeld dieser ionosphärischen elektrischen Ströme überlagert sich dem Erdmagnetfeld und wird verantwortlich gemacht für die am Boden beobachtbaren regulären geomagnetischen Schwankungen (Sq-Variationen).
Die hydromagnetischen Dynamomodelle berücksichtigen zusätzlich die Rückkopplung des ionosphärischen Plasmas auf das Neutralgas, was zu modifizierten Wellenmoden führt. Die Struktur dieser Wellen und ihrer zugehörigen elektrischen Felder verändert sich wegen der Höhenabhängigkeit der Dichte und der elektrischen Leitfähigkeit mit der Höhe. Andererseits muß in der Dynamoregion die Potentialdifferenz entlang der geomagnetischen Feldlinien verschwinden. Diese Bedingung koppelt die Wellenmoden in den verschiedenen Dynamoschichten miteinander. Unter der vereinfachenden Annahme zweier homogener aneinandergrenzender Schichten mit der Dichte und den elektrischen Leitfähigkeiten der E- bzw. F-Schicht wurde die elektrische Kopplung in den

hydromagnetischen Dynamomechanismus miteinbezogen. Hierdurch ergeben sich Veränderungen in der horizontalen und vertikalen Struktur der Wellenparameter Druck, Wind, elektrischer Strom und elektrisches Feld gegenüber dem ungekoppelten Modell.
Die Modifikation durch die elektrische Kopplung betrifft vor allem die Moden in der F-Schicht, während die Wellenmoden in der E-Schicht sich nur wenig verändern.
Zusätzlich wurde die Größe der verschiedenen Energieformen der elektrisch gekoppelten und ungekoppelten Wellenmoden berechnet.

1. Einleitung

Die seit altersher bekannte Erscheinung der Meeresgezeiten hat ihr Analogon in der Atmosphäre der Erde, das sich in der unteren Atmosphäre durch periodische halbtägliche und tägliche Druckvariationen bemerkbar macht. In mittleren und höheren Breiten sind die relativ kleinen Amplituden dieser Druckänderungen in der Geräusch - Komponente des Wetters kaum zu entdecken. In tropischen Regionen dagegen zeigt der Druck immerhin eine halbtägliche Gezeitenvariation von etwa 1 mbar (Chapman und Lindzen, 1970), während die Amplitude der täglichen Welle nur etwa 0.6 mbar beträgt. Es existieren ebenfalls lunare Gezeitenwellen, deren Druckamplituden aber erheblich kleiner sind. So hat die Welle mit der Periode eines halben Mondtages eine Amplitude von nur 50 µbar in den Tropen.

Der Anregungsmechanismus der solaren atmosphärischen Gezeitenwellen besteht in der Absorption der Sonnenstrahlung in bestimmten Spektralbereichen durch die Atmosphäre. Oberhalb von 120 km Höhe wird das Neutralgas aufgeheizt durch Absorption der XUV-Strahlung der Sonne mit einer Effizienz von etwa 30 % (Hays et al. 1973). In tropo- und stratosphärischen Höhen geschieht die thermale Anregung hauptsächlich über Strahlungsabsorption durch Wasserdampf und Ozon (Siebert, 1961). Daher erwartet man als dominierenden Mode die ganztägliche Welle. Das ist auch tatsächlich der Fall in thermosphärischen Höhen(Jacchia und Slowey,1967). Die im Vergleich zur halbtäglichen Welle geringere Amplitude in der unteren Atmosphäre wird mit der evaneszenten Natur der ganztäglichen Welle erklärt (Lindzen, 1966 und Kato, 1966).

Die lunaren Gezeitenwellen sind Folge der Gravitationswirkung des Mondes auf die Atmosphäre. Wegen ihrer vergleichsweise sehr kleinen Amplituden ist ihre Bedeutung für die Dynamik der Atmosphäre erheblich geringer als die der solaren Wellen.

Insgesamt spielen die Gezeitenwellen in der Thermosphäre eine bedeutsamere Rolle als in der unteren Atmosphäre, was vor allem aus dem unterschiedlichen dynamischen Verhalten der unteren und oberen Atmosphäre herrührt.

Oberhalb der Turbopause ist die Turbolenz nicht mehr wirksam und die mit der Höhe wachsenden molekulare Viskosität und Wärmeleitung führen zur Unterdrückung kleinräumiger und kurzperiodischer Störungen. Daher verhält sich die Thermosphäre ähnlich einem Tiefpaß, der nur langperiodische Wellen durchläßt. Nicht zuletzt aus diesen Gründen kann die Thermosphäre als lineares Oszillatorsystem aufgefaßt werden (Volland und Mayr, 1977), was die mathematische Behandlung planetarer Wellen und speziell der Gezeitenwellen in diesen Höhen sehr vereinfacht. Das näherungsweise lineare Verhalten der Thermosphäre zeigt sich zum Beispiel an der guten linearen Beziehung zwischen der täglichen Dichte- und Temperaturamplitude und der entsprechenden Wärmeeinstrahlung (Jacchia,1971) und ermöglicht die Trennung der beobachteten Variationen in Komponenten verschiedener Periode. Man kann also die Gesamtstruktur auffassen als lineare Überlagerung unabhängiger Wellen mit harmonischer zeitlicher Änderung. Weiter können die hydrodynamischen Gleichungen, die die Gezeitenwellen beschreiben, in erster störungstheoretischer Näherung lineari-

siert werden. Das heißt konkret, daß Druck, Dichte etc. dargestellt werden als Summe des jeweiligen ungestörten Grundzustandes und der überlagerten Störung, wobei in der Gleichung auftretende kleine Größen höherer Ordnung als der ersten vernachlässigt werden. Die Berücksichtigung nichtlinearer Terme ändert nach Mayr et al. (1973) nicht wesentlich die Ergebnisse der Störungstheorie in der Berechnung der täglichen Dichteschwankungen.

Die linearisierten Gleichungen der Gezeiten in der nichtdissipativen Atmosphäre entsprechen den Gezeitengleichungen für einen die Erdkugel überdeckenden Ozean, die bereits von Laplace aufgestellt wurden. (S. z.B. Chapman und Lindzen, 1970; Longuet-Higgins, 1968). Ihre Lösungen bilden einen diskreten Satz von Funktionen, den sogenannten Hough-Funktionen, welche die horizontale Struktur der Wellen beschreiben und die Eigenfunktionen des atmosphärischen dynamischen Systems darstellen ähnlich den elektromagnetischen Wellenmoden in einem Hohlraumleiter.

Zu jedem Wellenmode gehört ein charakteristisches globales Windsystem. In ionosphärischen Höhen bewegt dieser Gezeitenwind Ionen und Elektronen quer zu den Kraftlinien des Erdmagnetfeldes und erzeugt so ein elektrisches Feld $\underline{U}\times\underline{B}$, wo $\underline{U}$ die Geschwindigkeit des Neutralgases und $\underline{B}$ das Magnetfeld der Erde ist. Zusätzlich zu diesem sogenannten elektrischen Dynamo-Feld baut die Ladungstrennung zwischen Elektronen und Ionen ein sekundäres elektrisches Polarisationsfeld auf. Unter dem Einfluß von Dynamo- und Polarisationsfeld fließt ein elektrischer Strom, dessen Magnetfeld sich dem Erd-

magnetfeld überlagert und als Variation des letzteren am Boden beobachtet wird. Je nachdem, ob der treibende Gezeitenwind thermisch durch die Sonne oder durch die Gravitation des Mondes angeregt wird, spricht man von Sq- oder L-Variationen (Von quiet sun, bzw. lunar).

Die Dynamotheorie, die diese regulären geomagnetischen Schwankungen auf den Dynamoeffekt zurückführt, wurde ursprünglich von Steward vorgeschlagen (Chapman und Bartels, 1951). Die konventionellen Dynamo-Modelle gehen von Windfeldern aus, die als externe, vom ionosphärischen Plasma unabhängige Kräfte betrachtet werden. Sie werden kinematische Dynamos genannt. In Gegensatz dazu berücksichtigen die sogenannten hydromagnetischen Dynamos in selbstkonsistenter Weise die Kopplung zwischen dem neutralen Wind und dem Plasma, was eine Veränderung in der Struktur der Wellenmoden zur Folge hat.

Ursprünglich wurde angenommen, daß der elektrische Dynamostrom in einer dünnen Schale in Höhe der E-Schicht fließt, was durch Raketen-Beobachtungen unterstützt wird (Davis et al.,1965, Burrows et al., 1965). Numerische Berechnungen (Stening, 1969; Tarpley, 1970; Rishbeth, 1971) deuten aber darauf hin, daß in der gesamten Region zwischen 100 und 250 km nicht unerhebliche Teile des Dynamostromes fließen.

Die von den Gezeitenwellen in verschiedenen Höhen der Dynamoregion erzeugten elektrischen Felder sind nicht unabhängig voneinander, da die magnetischen Feldlinien wegen der großen Parallelleitfähigkeit in der Dynamoregion Äquipotentiallinien darstellen. Die Bedingung verschwindender elektrischer

Potentialdifferenz entlang der Feldlinien führt zur Kopplung der Wellenmoden verschiedener Dynamoschichten.
In der vorliegenden Arbeit wird ein hydromagnetisches Dynamomodell unter Berücksichtigung der elektrischen Kopplung zwischen der E- und F-Schicht vorgestellt. Dieses Modell fußt auf einer von Volland (Volland und Grellmann, 1978) entwickelten Theorie eines hydromagnetischen Sq-Dynamos und besteht in einer die Kopplung berücksichtigenden Erweiterung, die zu modifizierten Wellenmoden führt.

2. Modell eines hydromagnetischen Dynamos

Die Laplace'schen Gezeitengleichungen in der nichtdissipativen Atmosphäre lauten:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + 2\Omega \underline{\hat{r}} \times \underline{U} \cos\vartheta + \frac{1}{\rho_o} (\nabla p)_{hor} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\nabla \underline{U} + \frac{1}{\rho_o g h} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (2.2)$$

Dabei ist $\underline{U} = (u,v)$ der horizontale Windvektor, mit der positiven Komponente u nach Süden und positivem v nach Osten, t ist die Zeit, Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, (ϑ,λ) sind die Polarkoordinaten, $\underline{\hat{r}}$ ist der radiale Einheitsvektor, ρ_o ist die Dichte des Grundzustandes, p der Druck und g die Erdbeschleunigung. Die Größe h ist in der klassischen Gezeitentheorie die Tiefe des Ozeans und hat hier die Bedeutung einer Separationskonstanten, wie unten erläutert wird.

Gleichung (2.1) ist die linearisierte horizontale Bewegungsgleichung der atmosphärischen Störung, deren zweiter Term die horizontale Komponente der Corioliskraft darstellt. Neben den Gleichungen (2.1) und (2.2) gelten noch die vertikale Bewegungsgleichung, die Kontinuitätsgleichung, die Energiegleichung und die Gasgleichung (Volland und Mayr, 1977). Gleichung (2.2) ermöglicht jedoch eine Trennung der horizontalen und vertikalen Differentialgleichungen, die nur durch den Parameter h miteinander verknüpft sind (Chapman und Lindzen, 1970), und sie sorgt dafür, daß die horizontale Struktur der Gezeitenstörung allein durch (2.1) und (2.2) bestimmt wird, während die übrigen

Gleichungen die Höhenstruktur festlegen. Als Folge dieser Separation ergeben sich für die Störungsamplituden, wie etwa für den Druck p, Lösungen der Form:

$$p(z,\vartheta) = p_{n'}(z)\ \Theta_{n'}(\vartheta;\lambda)\ , \qquad (2.3)$$

wo z die Höhe ist. Die $\Theta_{n'}$ sind Eigenfunktionen des Differentialgleichungssystems (2.1), (2.2) zu einem diskreten Satz von Werten $h_{n'}$ für die Separationskonstante h. Sie beschreiben die horizontale Struktur der Gezeitenwellen und werden Hough-Funktionen genannt. Die $h_{n'}$ haben keine direkte physikalische Bedeutung mehr und werden in Anlehnung an ihre ursprüngliche Bedeutung in der Gezeitentheorie des Ozeans als äquivalente Tiefen bezeichnet.

Die Übernahme der Gleichung (2.2),die sich in der klassischen Gezeitentheorie aus der Kontinuitätsgleichung ergibt, postuliert also die Gültigkeit der Trennung von vertikaler und horizontaler Struktur gemäß (2.3).

In ionosphärischen Höhen treibt der Gezeitenwind $\underline{U}$ Elektronen und Ionen quer zum Erdmagnetfeld $\underline{B}_o$, auf die somit ein elektrisches Lorentz-Feld $\underline{U} \times \underline{B}_o$ wirkt. Die Ladungstrennung zwischen Ionen und Elektronen erzeugt ein zusätzliches elektrisches Polarisationsfeld $\underline{E}$. Nach dem verallgemeinerten Ohm'schen Gesetz fließt unter dem Einfluß dieser beiden Felder ein elektrischer Strom der Dichte $\underline{j}$ mit:

$$\underline{j} = \underline{\sigma}\ (\underline{E} + \underline{U} \times \underline{B}_o) \qquad (2.4)$$

wo $\underline{\sigma}$ der elektrische Leitfähigkeitstensor ist (s. z.B. Maeda und Kato, 1966).

Das Plasma übt nun umgekehrt durch Stöße mit den Neutralteilchen

eine Kraft $\underline{j} \times \underline{B}_o$ auf das Neutralgas aus (Martyn, 1953). In vielen Fällen wird diese elektromagnetische Kraft ohne das Polarisationsfeld $\underline{E}$ angesetzt (Kato und Matsushita, 1969; Murata, 1973). Dann gilt:

$$\underline{j} \times \underline{B}_o = \underline{\sigma}\, \underline{U} \times \underline{B}_o \times \underline{B}_o = -\sigma_p \underline{B}_o^2 v + \sigma_h B_o \underline{U} \times \underline{B}_o \qquad (2.5)$$

wo σ_p und σ_h die Pedersen- und Hall-Leitfähigkeit und v die Windkomponente senkrecht zu $\underline{B}_o$ ist (Kato, 1971).

Die horizontale Komponente von (2.5) kann geschrieben werden als:

$$(\underline{j} \times \underline{B}_o)_{hor} \sim \rho_o \nu (u \sin^2\chi, v)$$

wo ν die Stoßfrequenz und χ der Inklinationswinkel bedeutet (Kohl und King, 1967; Geisler, 1967). Setzt man vereinfachend $\sin^2\chi \sim 1$, so führt die Berücksichtigung dieser vereinfachten Amperekraft in Gleichung (2.1) zu komplexen Frequenzen (Volland, 1974; Volland und Mayr,1977).

Andere Autoren berechnen den Dynamostrom unter Einbeziehung des elektrischen Polarisationsfeldes, vernachlässigen aber völlig die Amperekraft (Stening, 1969; Tarpley, 1970; Forbes und Lindzen, 1976), so daß die Rückkopplung des Plasmas auf die Wind- und Druckfelder außer acht gelassen wird.

Die näherungsweise Berechnung eines hydromagnetischen Dynamos unter Berücksichtigung sowohl des Polarisation- wie des Lorentz-Feldes wurde von Volland (1976) für die fundamentale tägliche und halbtägliche Welle durchgeführt und später für alle möglichen Frequenzen und Wellenmoden erweitert (Volland und Grellmann, 1978). Dieses letztere hydromagnetische Dynamomodell soll im folgenden ausführlicher dargestellt werden, da die im

nächsten Kapitel zu behandelnde elektrische Kopplung direkt darauf aufbaut.

Die linearisierten Gleichungen, welche die gekoppelte Bewegung von Neutralgas und Plasma beschreiben, sind die horizontale Bewegungsgleichung (2.1) unter Einschluß der Amperekraft, die Gleichung (2.2), die Dynamogleichung (2.4), die Bedingung eines divergenzfreien Stroms und die Maxwellgleichungen unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + 2\Omega \hat{\underline{r}} \times \underline{U} \cos\vartheta + \frac{1}{\rho_o} (\nabla p)_{hor} = \frac{\underline{j} \times \underline{B}_o}{\rho_o} \tag{2.6}$$

$$\nabla \underline{U} + \frac{1}{\rho_o g h} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{2.7}$$

$$\underline{j} = \underline{\sigma} (\underline{E} + \underline{U} \times \underline{B}_o) \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \underline{j} = 0 \tag{2.9}$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \tag{2.10}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_o \underline{j} \tag{2.11}$$

Hierbei wird angenommen, daß der Strom in einer dünnen Schicht fließe, keine Vertikalkomponente besitze und das Wind, Strom und Leitfähigkeiten über die Höhe der Schicht gemittelt seien. Der horizontale Leitfähigkeitstensor $\underline{\sigma}$ hat die Form (z.B. Whitten und Poppoff):

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_p & \sigma_h \\ -\sigma_h & \sigma_p \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Die Pedersen- und Hall-Leitfähigkeit σ_p und σ_h seien räumlich und zeitlich konstant (was sicherlich eine grobe Näherung darstellt, da die Leitfähigkeit von der Sonneneinstrahlung und damit von der Ortszeit abhängt); σ_h ist positiv auf der nördlichen Halbkugel und negativ auf der südlichen Halbkugel. Das Erdmagnetfeld wird als koaxiales Dipolfeld angesehen:

$$\underline{B}_o = - B_o \, (2 \cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$$

In Gleichung (2.6) wurde die durch die Viskosität des Mediums ausgeübte Kraftwirkung vernachlässigt. Falls die molekulare Viskosität eine größere Rolle spielt, ist die vorausgesetzte Separation der Wellenmoden nicht mehr möglich (Jones, 1971). Jedoch zeigten Kohl und King (1967) und Geisler (1967), daß zumindest bis zur Höhe der F_2-Schicht der oberen Atmosphäre die Viskositätskraft in erster Näherung vernachlässigbar ist gegenüber der Kraft, die die Ionen dem Neutralgas entgegensetzen (Ion-Drag). Außerdem zeigte Volland (Volland und Grellmann, 1978) in einer Abschätzung des Einflusses der Viskosität auf die Lösungen des Gleichungssystems (2.6-2.11), daß ihre Bedeutung in der Dynamoregion der E-Schicht nur gering ist und auch in der F-Schicht die dominanten Moden nicht wesentlich verändert. (Eine Berücksichtigung der Viskosität in stark vereinfachter Form als Rayleigh-Reibung findet man z.B. bei Volland (Volland und Mayr, 1977).)

Wie in der Einleitung erläutert, können wir wegen der Linearisierung eine harmonische Zeitabhängigkeit ansetzen. Die sphärische Form der Atmosphäre legt ferner eine harmonische zonale Abhängigkeit nahe. Somit sind die Wellenparameter proportional zu $\exp(im\lambda - i\omega t)$, wo $m \geq 0$ eine positive ganze Zahl und ω die Frequenz der Welle ist und zwar positiv (negativ) für ostwärts (westwärts) wandernde Wellen. Da alle Gezeitenwellen westwärts wandern, können ihre Frequenzen dargestellt werden als $\omega = -m\Omega$.

Das vom horizontalen Dynamostrom erzeugte Magnetfeld $\underline{B}$ besitzt nach Gleichung (2.11) nur eine Vertikalkomponente. Mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes läßt sich leicht zeigen, daß dies innerhalb der Schicht mit guter Näherung gilt. In der Mitte der Dynamoschicht ist $\underline{B}$ exakt senkrecht ausgerichtet, erst zum Rande hin gewinnen die Horizontalkomponenten an Bedeutung.

Der Wind kann in einen rotationsfreien und einen quellenfreien Term zerlegt werden:

$$\underline{U} = -\nabla\Phi + \nabla\times\Psi\hat{\underline{r}} \tag{2.13}$$

Dieser Ansatz im Zusammenhang mit der Gezeitentheorie geht auf Love (1913) zurück.

Entsprechend können das Lorentz-Feld und das elektrische Feld entwickelt werden:

$$\underline{U}\times\underline{B}_o = -\nabla V + \nabla\times W\,\hat{\underline{r}} \tag{2.14}$$

$$\underline{E} = -\nabla S + \nabla\times T\hat{\underline{r}} \tag{2.15}$$

Φ, Ψ, V, W, S und T sind Funktionen nur von ϑ und λ.

Entgegen den meisten Behandlungen der Gezeitentheorie (z.B. Stening, 1969; Tarpley, 1970; Forbes und Lindzen, 1976;

Richmond et al., 1976) wird hier der quellenfreie Teil T des elektrischen Feldes in die Rechnung miteinbezogen. Volland wies nach, daß dieser Term in den Höhen der Dynamoschicht nicht vernachlässigbar ist (Volland und Grellmann, 1978).

Aus den Gleichungen (2.8) - (2.11) erhalten wir mit (2.14) und (2.15):

$$S + V + (W + T)\sigma_h/\sigma_p = 0 \tag{2.16}$$

$$i\omega B + \Delta T = 0 \tag{2.17}$$

$$\omega_R r_o^2 B - W - T = 0 \tag{2.18}$$

$$\underline{j} \times B_o/\rho_o = 2\, V_A^2 \cos\varphi\, \nabla B/B_o \tag{2.19}$$

Durch Anwendung des Divergenz- bzw. Rotationsoperators auf (2.6) unter Benutzung von (2.7), (2.18) und (2.19) ergibt sich:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\omega}{2\Omega}\Delta - \frac{m}{r_o^2} + \frac{hg}{2\omega\Omega}\Delta^2\right)\Phi + (\mu\Delta + D)\Psi &= \frac{\delta}{B_o}(\mu\Delta + D)(W + T) \\ i\left(\frac{\omega}{2\Omega}\Delta - \frac{m}{r_o^2}\right)\Psi - (\mu\Delta + D)\Phi &= -\frac{im\delta}{r_o^2 B_o}(W + T) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Wenden wir den Divergenz- und Rotationsoperator auf (2.14) an, so erhalten wir mit (2.13):

$$\begin{aligned} \Delta V &= 2B_o\left(\frac{im\Phi}{r_o^2} - (\mu\Delta + D)\Psi\right) \\ \Delta W &= 2B_o\left((\mu\Delta + D)\Phi + \frac{im\Psi}{r_o^2}\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Folgende Abkürzungen und Symbole wurden benutzt:

$V_A = B_o/(\mu_o\rho_o)^{1/2}$ (Alvén-Geschwindigkeit), $\omega_R = 1/(\sigma_c\mu_o r_o^2)$,

$\delta = \omega_A/\omega_R$ mit $\omega_A = V_A^2/(\Omega r_o^2)$, $\sigma_c = \sigma_p + \sigma_h^2/\sigma_p$ (Cowling-Leitfähigkeit), r_o ist der radiale Abstand der Dynamoschicht, Δ der horizontale Laplace-Operator, $\mu = \cos\vartheta$ und

$$D = \frac{1-\mu^2}{r_o^2}\frac{\partial}{\partial\mu}$$

Die Funktion der horizontalen Druckstruktur (die modifizierte Hough-Funktion) kann aus (2.7) bestimmt werden zu:

$$p/p_o = \Theta = -\frac{h}{i\omega H}\Delta\Phi, \qquad (2.22)$$

wobei p_o der Druck im ungestörten Grundzustand und H die Skalenhöhe bedeuten.

Aus (2.8) folgt mit (2.9) und (2.14),(2.15) für den Dynamostrom:

$$\underline{j} = \sigma_c \nabla \times (W + T)\underline{\hat{r}} \qquad (2.23)$$

Zur Lösung des geschlossenen Differentialgleichungssystems (2.16) - (2.21) werden die Funktionen Φ, Ψ, V, W, S, T in Kugelflächenfunktionen entwickelt:

$$\Phi = \Sigma\, \Phi_n^m Y_n^m \qquad W = B_o \Sigma\, w_n^m Y_n^m$$

$$\Psi = i\Sigma\, \Psi_n^m Y_n^m \qquad S = iB_o \Sigma\, s_n^m Y_n^m \qquad (2.24)$$

$$V = iB_o \Sigma\, v_n^m Y_n^m \qquad T = iB_o \Sigma\, t_n^m Y_n^m$$

mit $Y_n^m = P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\lambda - i\omega t)$, wo P_n^m die zugeordneten Legendre-Polynome in der Neumann-Normierung sind.

Aus (2.21) ergibt sich dann durch Einsetzen der entwickelten Funktionen:

$$V_n^m = -2\left(\frac{m}{n(n+1)}\Phi_n^m + \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)}\Psi_{n+1}^m + \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)}\Psi_{n-1}^m\right)$$

$$W_n^m = 2\left(\frac{m}{n(n+1)}\Psi_n^m + \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)}\Phi_{n+1}^m + \frac{(n-1)(2n-1)}{n(2n-1)}\Phi_{n-1}^m\right) \qquad (2.25)$$

In Gleichung (2.18) kann B mit (2.17) eliminiert werden und aus (2.16) und (2.18) folgt dann:

$$T_n^m = W_n^m \, \omega/\omega_n$$
$$S_n^m = -V_n^m + i\sigma_h n(n+1)\omega_R W_n^m/(\sigma_p \omega_n) \qquad (2.26)$$

wo $\omega_n = n(n+1)\omega_R - i\omega$

Die Funktionen Φ, Ψ, W und T können nun in der Form (2.24) in (2.20) eingesetzt werden und da die Entwicklungskoeffizienten von W und T über (2.25) und (2.26) als Funktionen der Φ_n^m, Ψ_n^m darstellbar sind, erhalten wir aus (2.20) nach Gleichsetzen der Koeffizienten der Y_n^m ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Φ_n^m, Ψ_n^m.

Das System kann in zwei unabhängige Gleichungssysteme separiert werden, deren Lösungen symmetrische bzw. antisymmetrische Hough-Funktionen bezüglich des Äquators ergeben.

Das symmetrische System hat die Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\bar{h} & a_{12} & a_{13} & 0 & & \cdot \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\bar{h} & a_{34} & & \cdot \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\bar{h} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_m^m \\ \Psi_{m+1}^m \\ \Phi_{m+2}^m \\ \Psi_{m+3}^m \\ \Phi_{m+4}^m \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad (2.27)$$

Das antisymmetrische System hat die Form:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_{21} & a_{22}-\bar{h} & a_{23} & a_{24} & 0 & \cdot \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 & \cdot \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\bar{h} & a_{45} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^m_m \\ \Phi^m_{m+1} \\ \Psi^m_{m+2} \\ \Phi^m_{m+3} \\ \Psi^m_{m+4} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad (2.28)$$

Die Gleichungssysteme (2.27), (2.28) besitzen nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn ihre Determinanten verschwinden. Aus dieser Bedingung werden die normierten äquivalenten Tiefen $\bar{h}$ bestimmt.

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes läßt sich die Determinante von (2.27) bzw. (2.28) auf die verdichtete Form bringen:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\bar{h} & a'_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a'_{21} & a'_{22}-\bar{h} & a'_{23} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a'_{32} & a'_{33}-\bar{h} & a'_{34} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \underline{0}$$

Dann stellt die Berechnung von $\bar{h}$ ein gewöhnliches Eigenwertproblem dar und ergibt einen Satz von äquivalenten Tiefen $\bar{h}_{n'}$. Zu jedem Eigenwert $\bar{h}_{n'}$ liefern (2.27) bzw. (2.28) als Lösung die

Koeffizienten Φ_n^m, Ψ_n^m, welche die Hough-Funktionen und die anderen Wellenparameter bestimmen.

Die Systeme (2.27) und (2.28) sind von Longuet-Higgins (1968) für δ=0 hergeleitet worden. In Abbildung 1 ist der Verlauf einiger normierter äquivalenter Tiefen in Abhängigkeit von der normierten Frequenz ω/Ω für die zonale Wellenzahl m=1 nach Longuet-Higgins (1968) dargestellt. Man kann zwei Arten von Wellentypen unterscheiden; Wellen der Klasse 1 mit endlichen positiven äquivalenten Tiefen und Wellen der Klasse 2 mit unendlich großen Werten für h bei endlichen Frequenzen oder mit negativen äquivalenten Tiefen. Die letzteren sind von Lindzen (1966) und Kato (1966) unabhängig voneinander entdeckt worden. Die Wellen der Klasse 2 existieren nicht bei Frequenzen $\omega > 2\Omega$ und verschwinden völlig in einer nichtrotiernden Atmosphäre.

Die Nummerierung der äquivalenten Tiefen folgt der Größe des Betrages $|h|$, die n' sind positiv für Wellen der Klasse 1, negativ für Wellen der Klasse 2 und es ist $|n'| \geq m$. Die zugehörigen Wellenmoden werden durch das Wertepaar (m,n') symbolisiert (Chapman und Lindzen, 1970). In dieser Notierung sind die Wellen der Klasse 1 (der Klasse 2) symmetrisch bezüglich des Äquators, wenn m+n' gerade (ungerade) ist.

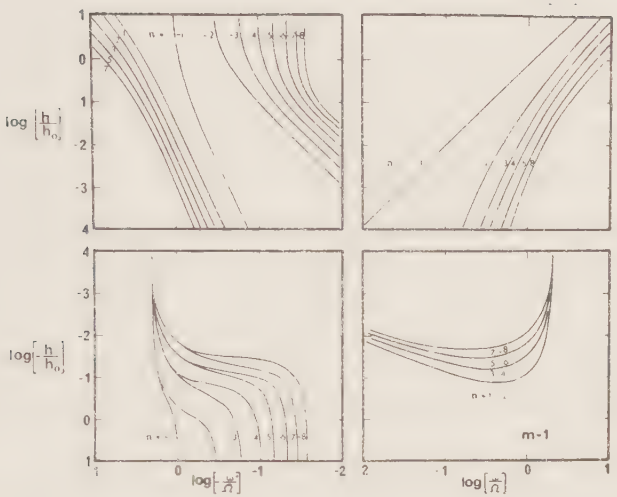


Abb.1: Normierte äquivalente Tiefen gegen normierte Frequenz für m=1 nach Longuet-Higgins (1968) (δ=0)

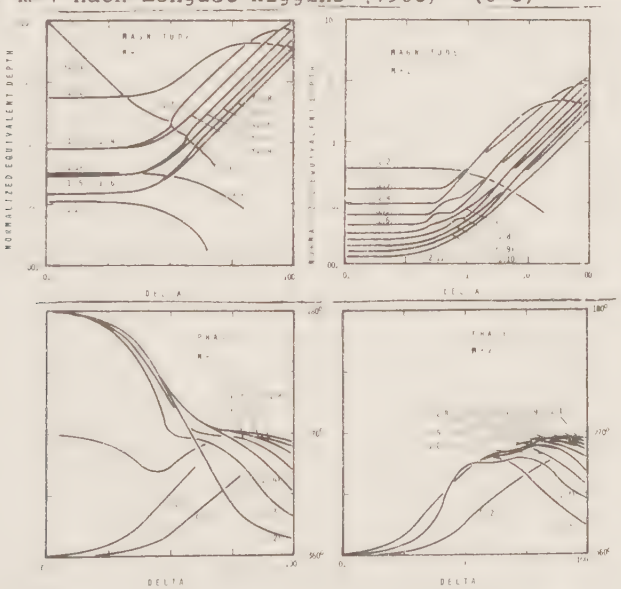


Abb.2: Betrag und Phase der komplexen äquivalenten Tiefen gegen δ für m=1, ω/Ω=-1 und m=2, ω/Ω=-2 (Volland und Grellmann (1978))

Für $\delta \neq 0$ nehmen die äquivalenten Tiefen komplexe Werte an. Die Abbildung 2 zeigt den Verlauf von Betrag und Phase der h_n, als Funktion von δ für m=1, $\bar{\omega}$=-1 bzw. m=2, $\bar{\omega}$=-2. Sie gehen mit kleiner werdendem δ eindeutig in die Moden für δ=0 über und werden demgemäß entsprechend durchnummeriert. Man sieht, daß sich die Hierarchie der Wellenmoden ändert. Bei den ganztäglichen Wellen ($\bar{\omega}$=-1) dominieren die negativen Moden, während bei den halbtäglichen Wellen ($\bar{\omega}$=-2) die positiven Moden bis etwa δ=1 dominierend sind, aber für größere Werte von δ immer mehr an Bedeutung verlieren.

Die fundamentalen ganztäglichen Wellenmoden sind in der E-Schicht ($\delta \sim 1$) die symmetrische (1,-2)-Welle und die antisymmetrische (1,-1) -Welle und in der F-Schicht ($\delta \sim 10$) die (1,-2)- und die (1,-3)-Welle. Der fundamentale symmetrische bzw. antisymmetrische Mode der halbtäglichen Wellen ist in der E-Schicht die (2,2)- bzw. (2,3)-Welle und in der F-Schicht die (2,-3)- bzw. (2,-2)-Welle.

Die äquivalente Tiefe h eines Wellenmodes bestimmt auch dessen vertikale Struktur, die nach Volland et al. (1977) die Form hat:

$$\exp\{(1-\beta+i\alpha)z/(2H)\} = \exp(ik_z z) \qquad (2.29)$$

$$\text{wo } \beta - i\alpha = \left(1 - \frac{4(\gamma-1)H}{\gamma h}\right)^{1/2} \qquad (2.30)$$

Hieraus können eine vertikale Wellenlänge

$$\lambda_z = \frac{4\pi H}{\alpha}$$

und eine Skalenhöhe der Dämpfung

$$H_z = \frac{2H}{\beta - 1}$$

definiert werden.

Die Werte der Größen α, β, λ_z und H_z der fundamentalen Wellenmoden in der E-Schicht und in der F-Schicht sowie die horizontale Struktur der verschiedenen Wellenparameter wie Druck, Wind etc.sind in Kapitel 6 bzw. im Anhang zum Vergleich mit den entsprechenden Größen und Strukturen der elektrisch gekoppelten Moden zu finden.

3. Erweiterung des hydromagnetischen Dynamo-Modells

Die verschiedenen Dynamoregionen werden durchdrungen von den Feldlinien des Erdmagnetfeldes. Da die Leitfähigkeit entlang der Magnetfeldlinien (Parallelleitfähigkeit) in diesen Höhen weit größer ist als die anderen Leitfähigkeiten, stellen die Feldlinien in guter Näherung Äquipotentiallinien dar. So werden die durch die Gezeitenwellen erzeugten elektrischen Felder der Dynamoschicht in die F-Schicht abgebildet und umgekehrt. Auf diese Weise sind die Wellenmoden in verschiedenen Höhen miteinander gekoppelt.

Die elektrische Kopplung der Wellenmoden in der E- und F-Schicht soll nun an Hand eines sehr vereinfachten Modells in die Rechnung miteinbezogen werden. Dazu betrachten wir zwei dünne aneinandergrenzende Schichten 1 und 2, in denen jeweils horizontale elektrische Ströme fließen und die Gleichungen (2.6) bis (2.11) gelten (Abb 3). Außerhalb der Schichten mögen keine horizontalen elektrischen Ströme und Felder vorhanden sein. Da die magnetischen Feldlinien Äquipotentiallinien sind, muß das elektrische Feld in beiden Schichten gleich sein.

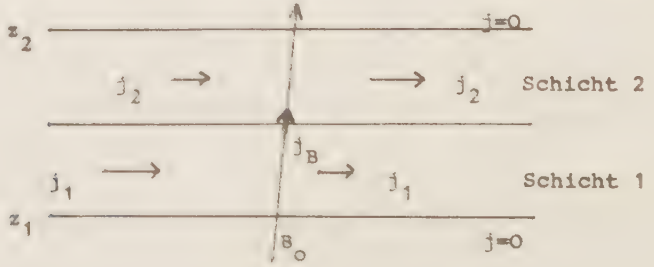


Abb.3

Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Schichten werde ausgeglichen durch einen Strom j_B entlang der Magnetfeldlinien. Wir nehmen ferner an, daß auch der Strom j_B außerhalb der Schichten null sei. Unterhalb der Schicht 1 ist diese Annahme gerechtfertigt durch die geringe Parallelleitfähigkeit σ_o. Dies gilt nicht oberhalb der F-Schicht. Ein dort austretender Strom j_B würde entlang der Magnetfeldlinie fließend am Spiegelpunkt wieder in die F-Schicht eintreten. Jedoch gilt näherungsweise $j_B = \sigma_o \, U/L$, wo U die Potentialdifferenz und L die Länge der Strombahn zwischen zwei Punkten sei. Außer in Äquatornähe ist die Weglänge zwischen zwei Spiegelpunkten entlang der Feldlinie viel größer als die Schichtdicke, so daß bei größenordnungsmäßig gleicher Potentialdifferenz die Stromdichte j_B oberhalb der Schicht 2 zu vernachlässigen ist.

Die Ströme $\underline{j}_1$, $\underline{j}_2$ sind nun nicht mehr divergenzfrei, wegen der Stromfreiheit außerhalb der Schichten gilt nun aber:

$$\nabla \underline{j}_1 = - \nabla \underline{j}_2 \qquad (3.1)$$

Im elektrisch ungekoppelten Fall gilt für das Magnetfeld innerhalb einer Schicht mit der Stromdichte $\underline{j}$:

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_o \, \underline{j} \qquad \text{(vgl.(2.11))}$$

Diese Beziehung gilt hier nicht mehr, da die Identität $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{B}) = 0$ erfüllt sein muß, aber:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\underline{B}_{1,2}) = \mu_o\,\nabla\cdot\underline{j}_{1,2} \neq 0 \quad ,$$

wobei die Indizes die jeweilige Schicht bezeichnen. Außerdem muß wegen $\nabla\times\underline{E}_{1,2} = i\omega\underline{B}_{1,2}$ und $\underline{E}_1 = \underline{E}_2$ gelten: $\underline{B}_1 = \underline{B}_2$, was mit dem Ansatz (2.11) ebenfalls nicht erfüllt wird.

Um nun den Forderungen $\nabla\cdot(\nabla\times\underline{B}_{1,2}) = 0$ und $\underline{B}_1 = \underline{B}_2$ Rechnung zu tragen, wurde davon ausgegangen, daß das von j_1 , j_2 erzeugte externe Magnetfeld sich darstellen läßt als Feld eines mittleren Stromes $I_{1,2} = (j_1+j_2)(z_1-z_2)/2$.

Für das zu einem solchen Strom zugehörige interne Magnetfeld $\underline{\bar{B}}$ gilt:

$$\nabla\times\underline{\bar{B}} = \mu_o(\underline{j}_1 + \underline{j}_2)/2 \qquad (*)$$

Dieses Feld ist in beiden Schichten gleich und es gilt

$$\nabla\cdot(\nabla\times\underline{\bar{B}}) = \mu_o\,\nabla\cdot(\underline{j}_1+\underline{j}_2)/2 = 0 \quad , \text{ wegen } \nabla\cdot\underline{j}_1 = -\nabla\cdot\underline{j}_2 \; .$$

Da das Feld $\bar{B}$ die für das tatsächliche Feld B innerhalb der Schichten geforderten Bedingungen erfüllt und seine Fortsetzung außerhalb der Schichten mit dem externen B-Feld übereinstimmt, wurde für B der Ansatz (*) übernommen. Also:

$$\nabla\times\underline{B} = \frac{\mu_o}{2}\,(\underline{j}_1 + \underline{j}_2) \qquad (3.2)$$

Der Beitrag des Stromes j_B zum Magnetfeld wird vernachlässigt.

Tatsächlich ergibt sich, daß j_B sehr viel kleiner ist als die horizontalen Ströme j_1 und j_2 (s.Anhang).
Ferner gelte wie in Kapitel 2:

$$\frac{\partial \underline{U}_k}{\partial t} + 2\Omega_{\underline{\hat{r}}} \times \underline{U}_k \cos\vartheta + \frac{1}{\rho_{ok}} (\nabla p_k)_{hor} = \frac{\underline{j}_k \times \underline{B}_o}{\rho_{ok}} \tag{3.3}$$

$$\nabla \underline{U}_k + \frac{1}{\rho_{ok} g h_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} = 0 \tag{3.4}$$

$$\underline{j}_k = \sigma_k (\underline{E} + \underline{U}_k \times \underline{B}_o) \tag{3.5}$$

$$\nabla \times \underline{E} = i\omega \underline{B} \tag{3.6}$$

mit

$$\underline{U}_k = -\nabla \Phi_k + \nabla \times \Psi_k \underline{\hat{r}} \tag{3.7}$$

$$\underline{U}_k \times \underline{B}_o = -\nabla V_k + \nabla \times W_k \underline{\hat{r}} \tag{3.8}$$

$$\underline{E} = -\nabla S + \nabla \times T \underline{\hat{r}} \tag{3.9}$$

wobei k=1,2 die jeweilige Schicht bezeichne. Die Gleichungen (3.1) - (3.6) stellen ein lineares Differentialgleichungssystem dar. Wegen (3.1) und (3.2) sind die Gleichungen für Schicht 1 und 2 miteinander gekoppelt.
Gleichung (3.8) und (3.9) in (3.5) eingesetzt, ergibt:

$$\underline{j}_k = -\nabla Q_k + \nabla \times R_k \underline{\hat{r}} \tag{3.10}$$

mit:

$$Q_k = \sigma_{pk}(S + V_k) + \sigma_{hk}(T + W_k)$$

$$R_k = -\sigma_{hk}(S + V_k) + \sigma_{pk}(T + W_k)$$

Daraus folgt:

$$\nabla\cdot(\underline{j}_k \times \underline{B}_o) = 2B_o((\mu\Delta + D)R_k - \frac{im}{r_o^2} Q_k)$$

$$\nabla \times (\underline{j}_k \times \underline{B}_o) = -2B_o((\mu\Delta + D)Q_k + \frac{im}{r_o^2} R_k)\underline{f} \qquad (3.11)$$

wo $\mu = \cos\vartheta$, $D = \frac{1-\mu^2}{r_o^2}\frac{\partial}{\partial\mu}$, Δ = horizontaler Laplace-Operator,

r_o = radialer Abstand

Wenden wir nun den Divergenz- und Rotationsoperator auf (3.3) an, so erhalten wir mit (3.4) und (3.11):

$$i(\frac{\omega}{2\Omega}\Delta - \frac{m}{r_o^2} + \frac{h_k g}{2\omega\Omega}\Delta^2)\Phi_k + (\mu\Delta + D)\Psi_k$$
$$= \frac{B_o}{\Omega\rho_{ok}}((\mu\Delta + D)R_k - \frac{im}{r_o^2} Q_k) \qquad (3.12)$$

und

$$i(\frac{\omega}{2\Omega}\Delta - \frac{m}{r_o^2})\Psi_k - (\mu\Delta + D)\Phi_k$$
$$= -\frac{B_o}{\Omega\rho_{ok}}((\mu\Delta + D)Q_k + \frac{im}{r_o^2} R_k) \qquad (3.13)$$

Die **Anwendung** des $\nabla\times$-Operators auf (3.2) ergibt unter Beachtung von (3.10):

$$\Delta\underline{B} = \frac{\mu_o}{2}\,\Delta(R_1 + R_2)\underline{\hat{f}} \tag{3.14}$$

Aus (3.6) folgt:

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{E}) = i\omega\nabla\times\underline{B}$$

während nach (3.9):

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{E}) = \nabla\times(\nabla\times(\nabla\times T\underline{\hat{f}})) = \nabla\times(-\Delta T\underline{\hat{f}})$$

Somit:

$$i\omega\underline{B} = -\Delta T\underline{\hat{f}} \tag{3.15}$$

Schließlich folgt aus (3.14) und (3.15):

$$\Delta T = -\frac{i\omega\mu_o}{2}\,(R_1 + R_2) \tag{3.16}$$

Gleichung (3.1) schreibt sich unter Anwendung von (3.10):

$$-\Delta Q_1 = \Delta Q_2 \tag{3.17}$$

Aus Gleichung (3.17) erhalten wir mit Benutzung von (3.10):

$$S = -\frac{1}{\sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}}\,((\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2})T + \sigma_{p_1}V_1 + \sigma_{p_2}V_2 + \sigma_{h_1}W_1 + \sigma_{h_2}W_2) \tag{3.18}$$

Setzt man: $\sigma_g = \dfrac{(\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2})^2}{\sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}} + \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}$

und $\tilde{\sigma} = \dfrac{\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}}{\sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}}$

so ergibt Gleichung (3.16) mit (3.10) und (3.18):

$$\Delta T = -\frac{i\omega\mu_o}{2}\,(\sigma_g T + (\sigma_{p_1}\tilde{\sigma} - \sigma_{h_1})V_1 + (\sigma_{p_2}\tilde{\sigma} - \sigma_{h_2})V_2 + (\sigma_{h_1}\tilde{\sigma} + \sigma_{p_1})W_1 + (\sigma_{h_2}\tilde{\sigma} + \sigma_{p_2})W_2 \tag{3.19}$$

Mit dem Ansatz (s.Kapitel 2):

$$T = iB_o \sum_{n\geq m} T_n^m Y_n^m\,, \quad V = iB_o \sum_{n\geq m} V_n^m Y_n^m$$

$$S = iB_o \sum_{n\geq m} S_n^m Y_n^m\,, \quad W = B_o \sum_{n\geq m} W_n^m Y_n^m$$

und $\Delta Y_n^m = -\frac{n(n+1)}{r_o^2} Y_n^m$

folgt aus (3.19) unter Berücksichtigung der Orthogonalität der P_n^m:

$$T_n = \frac{1}{\alpha_n - \sigma_g}\,((\tilde{\sigma}\sigma_{p_1} - \sigma_{h_1})V_n^1 + (\tilde{\sigma}\sigma_{p_2} - \sigma_{h_2})V_n^2 - i(\tilde{\sigma}\sigma_{h_1} + \sigma_{p_1})W_n^1 - i(\tilde{\sigma}\sigma_{h_2} + \sigma_{p_2})W_n^2) \tag{3.20}$$

wo $\alpha_n = \frac{2n(n+1)}{i\omega\mu_o r_o^2}$

Und aus (3.18) folgt:

$$
\begin{aligned}
S_n = -\tilde{\sigma}\Big(& \Big(\frac{\tilde{\sigma}\sigma_{p_1} - \sigma_{h_1}}{\alpha_n - \sigma_g} + \frac{\sigma_{p_1}}{\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}} \Big) V_n^1 \\
& + \Big(\frac{\tilde{\sigma}\sigma_{p_2} - \sigma_{h_2}}{\alpha_n - \sigma_g} + \frac{\sigma_{p_2}}{\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}} \Big) V_n^2 \\
& - i\Big(\frac{\tilde{\sigma}\sigma_{h_1} + \sigma_{p_1}}{\alpha_n - \sigma_g} + \frac{\sigma_{h_1}}{\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}} \Big) W_n^1 \\
& - i\Big(\frac{\tilde{\sigma}\sigma_{h_2} + \sigma_{p_2}}{\alpha_n - \sigma_g} + \frac{\sigma_{h_2}}{\sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}} \Big) W_n^2
\end{aligned}
\qquad (3.21)
$$

Mit $\Phi_k = \sum_{n \geq m} \Phi_n^{km} Y_n^m$, $\Psi_k = i \sum_{n \geq m} \Psi_n^{km} Y_n^m$ ergeben (3.12) und (3.13) unter Anwendung der Identität

$$
(\mu\Delta + D) Y_n^m = -\frac{(n^2-1)(n+m)}{(2n+1) r_o^2} Y_{n-1}^m - \frac{n(n+2)(n-m+1)}{(2n+1) r_o^2} Y_{n+1}^m
$$

und der Gleichung (3.10):

$$
\begin{aligned}
& \Big(\frac{\bar{\omega}^2}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega}m}{n^2(n+1)^2} - \bar{h}_k \Big) \Phi_n^{km} + 2\bar{\omega} f_n^m \Psi_{n+1}^{km} + 2\bar{\omega} g_n^m \Psi_{n-1}^{km} \\
& = \frac{2\bar{\omega} B_o^2}{\Omega \rho_{ok}} \Big(-\sigma_{hk}(S_{n+1}^m + V_{n+1}^{km}) f_n^m - \sigma_{hk}(S_{n-1}^m + V_{n-1}^{km}) g_n^m \\
& \quad + \sigma_{pk}(T_{n+1}^m - iW_{n+1}^{km}) f_n^m + \sigma_{pk}(T_{n-1}^m - iW_{n-1}^{km}) g_n^m \\
& \quad + \frac{m}{n^2(n+1)^2} \big(i\sigma_{pk}(S_n^m + V_n^{km}) + i\sigma_{hk}(T_n^m - iW_n^{km}) \big) \Big) \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}^2}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega}m}{n^2(n+1)^2} \right) \psi^{km}_n + 2\bar{\omega}\, f^m_n\, \Phi^{km}_{n+1} + 2\bar{\omega}\, g^m_n\, \Phi^{km}_{n-1}$$

$$= \frac{2\bar{\omega}B_o^2}{\Omega\rho_{ok}} \left(i\sigma_{pk}(S^m_{n+1} + V^{km}_{n+1})\, f^m_n + i\sigma_{pk}(S^m_{n-1} + V^{km}_{n-1})\, g^m_n \right.$$

$$+ i\sigma_{hk}(T^m_{n+1} - iW^{km}_{n+1})\, f^m_n + i\sigma_{pk}(T^m_{n-1} + iW^{km}_{n-1})\, g^m_n$$

$$\left. + \frac{im}{n^2(n+1)^2} (i\sigma_{hk}(S^m_n + V^{km}_n) - i\sigma_{pk}(T^m_n - iW^{km}_n)) \right) \qquad (3.23)$$

wobei:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\Omega}\ , \quad \bar{h} = \frac{h_k}{h_o} \text{ mit } h_o = \Omega^2 r_o^2/g \simeq 22\text{km}$$

$$f^m_n = \frac{(n+2)(n+m+1)}{n(n+1)^2(2n+3)}$$

$$g^m_n = \frac{(n-1)(n-m)}{n^2(n+1)(2n-1)}$$

Aus (3.20) und (3.21) folgt nun :

$$S^m_n + V^{km}_n = (\beta_{n1} + 2 - k)\, V^{1m}_n + (\beta_{n2} + k - 1)\, V^{2m}_n + i\gamma_{n1}\, W^{1m}_n + i\gamma_{n2}\, W^{2m}_n \qquad (3.24)$$

$$T_n - iW^{km}_n = -\delta_{n1}\, V^{1m}_n - \delta_{n2}\, V^{2m}_n - i(\varepsilon_{n1} + 2 - k)\, W^{1m}_n - i(\varepsilon_{n2} + k - 1)\, W^{2m}_n \qquad (3.25)$$

wo:

$$\beta_{nl} = \tilde{\sigma}\frac{\sigma_{hl} - \tilde{\sigma}\sigma_{pl}}{\alpha_n - \sigma_c} - \frac{\sigma_{pl}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}}$$

$$\gamma_{nl} = \tilde{\sigma}\frac{\sigma_{pl} + \tilde{\sigma}\sigma_{hl}}{\alpha_n - \sigma_c} + \frac{\sigma_{hl}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}}$$

$$\delta_{nl} = \frac{\sigma_{hl} - \tilde{\sigma}\sigma_{pl}}{\alpha_n - \sigma_c}$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{\sigma_{pl} + \tilde{\sigma}\sigma_{hl}}{\alpha_n - \sigma_c}, \qquad l = 1,2 \qquad \textbf{(3.25a)}$$

Setzen wir die beiden letzten Gleichungen in (3.22) und (3.23) ein, so ergibt sich das Gleichungssystem (3.26), (3.27):

$$\left(\frac{\bar{\omega}^2}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega}m}{n^2(n+1)^2} - \bar{h}_k \right) \phi^{km}_n + 2\bar{\omega}\, f^m_n\, \psi^{km}_{n+1} + 2\bar{\omega}\, g^m_n\, \psi^{km}_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \Big(f^m_n (a^k_{n+1,1}\, V^{1m}_{n+1} + a^k_{n+1,2}\, V^{2m}_{n+1})$$

$$+ \frac{im}{n^2(n+1)^2} (b^k_{n,1}\, V^{1m}_n + b^k_{n,2}\, V^{2m}_n)$$

$$+ g^m_n (a^k_{n-1,1}\, V^{1m}_{n-1} + a^k_{n-1,2}\, V^{2m}_{n-1})$$

$$+ if^m_n (c^k_{n+1,1}\, W^{1m}_{n+1} + c^k_{n+1,2}\, W^{2m}_{n+1})$$

$$- \frac{m}{n^2(n+1)^2} (d^k_{n,1}\, W^{1m}_n + d^k_{n,2}\, W^{2m}_n)$$

$$+ ig^m_n (c^k_{n-1,1}\, W^{1m}_{n-1} + c^k_{n-1,2}\, W^{2m}_{n-1}) \Big) \qquad (3.26)$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}^2}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega}m}{n^2(n+1)^2} \right) \psi^{km}_n + 2\bar{\omega}\, f^m_n\, \phi^{km}_{n+1} + 2\bar{\omega}\, g^m_n\, \phi^{km}_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \Big(if^m_n (b^k_{n+1,1}\, V^{1m}_{n+1} + b^k_{n+1,2}\, V^{2m}_{n+1})$$

$$+ \frac{m}{n^2(n+1)^2} (a^k_{n,1}\, V^{1m}_n + a^k_{n2}\, V^{2m}_n)$$

$$+ ig^m_n (b^k_{n-1,1}\, V^{1m}_{n-1} + b^k_{n-1,2}\, V^{2m}_{n-1})$$

$$- f^m_n (d^k_{n+1,1}\, W^{1m}_{n+1} + d^k_{n+1,2}\, W^{2m}_{n+1})$$

$$+ \frac{im}{n^2(n+1)^2} (c^k_{n,1}\, W^{1m}_n + c^k_{n,2}\, W^{2m}_n)$$

$$- g^m_n (d^k_{n-1,1}\, W^{1m}_{n-1} + d^k_{n-1,2}\, W^{2m}_{n-1}) \Big) \qquad (3.27)$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned} a^k_{nl} &= \\ b^k_{nl} &= \\ c^k_{nl} &= \\ d^k_{nl} &= \end{aligned} \quad \frac{4\bar{\omega}B_o^2}{\Omega\rho_{ok}} \begin{cases} (\sigma_{hk}(\beta_{nl} + (-1)^l(k-3+1)) + \sigma_{pk}\delta_{nl} \\ (-\sigma_{pk}(\beta_{nl} + (-1)^l(k-3+1)) + \sigma_{hk}\delta_{nl} \\ (\sigma_{pk}(\varepsilon_{nl} + (-1)^l(k-3+1)) + \sigma_{hk}\gamma_{nl} \\ (\sigma_{hk}(\varepsilon_{nl} + (-1)^l(k-3+1)) - \sigma_{pk}\gamma_{nl} \end{cases}$$

$$l=1,2 \qquad \text{(3.27a)}$$

Aus (3.7) und (3.8) folgt nun wie in Kapitel 2:

$$V^{km}_n = -2n(n+1)\left(\frac{m}{n^2(n+1)^2}\,\Phi^{km}_n + f^m_n\,\Psi^{km}_{n+1} + g^m_n\,\Psi^{km}_{n-1}\right) \qquad (3.28)$$

$$W^{km}_n = 2n(n+1)\left(\frac{m}{n^2(n+1)^2}\,\Psi^{km}_n + f^m_n\,\Phi^{km}_{n+1} + g^m_n\,\Phi^{km}_{n-1}\right) \qquad (3.29)$$

Schließlich erhalten wir nach Einsetzen der Gleichungen (3.28), (3.29) in (3.26) und (3.27) ein Gleichungssytem der Form:

$$\begin{aligned} &j_k A^1_{n-2}\,\Phi^{1m}_{n-2} + j_k A^2_{n-2}\,\Phi^{2m}_{n-2} + j_k B^1_{n-2}\,\Psi^{1m}_{n-2} + j_k B^2_{n-2}\,\Psi^{2m}_{n-2} \\ &+ j_k C^1_{n-1}\,\Phi^{1m}_{n-1} + j_k C^2_{n-1}\,\Phi^{2m}_{n-1} + j_k D^1_{n-1}\,\Psi^{1m}_{n-1} + j_k D^2_{n-1}\,\Psi^{2m}_{n-1} \\ &+ j_k E^1_n\,\Phi^{1m}_n + j_k E^2_n\,\Phi^{2m}_n + j_k F^1_n\,\Psi^{1m}_n + j_k F^2_n\,\Psi^{2m}_n \qquad (3.30) \\ &+ j_k G^1_{n+1}\,\Phi^{1m}_{n+1} + j_k G^2_{n+1}\,\Phi^{2m}_{n+1} + j_k H^1_{n+1}\,\Psi^{1m}_{n+1} + j_k H^2_{n+1}\,\Psi^{2m}_{n+1} \\ &+ j_k K^1_{n+2}\,\Phi^{1m}_{n+2} + j_k K^2_{n+2}\,\Phi^{2m}_{n+2} + j_k L^1_{n+2}\,\Psi^{1m}_{n+2} + j_k L^2_{n+2}\,\Psi^{2m}_{n+2} = 0 \end{aligned}$$

In (3.30) ist:

$$\begin{cases} n \geq m \\ j = 1,2 \\ k = 1,2 \end{cases}$$

und für $j = 1$:

$$ {}_{1}^{k}A_{n-2}^{l} = \begin{cases} i q_n^m \, {}_{k}c_{n-1}^{l} & \text{für } n \geq m+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} $$

$$ {}_{1}^{k}B_{n-2}^{l} = -q_n^m \, {}_{k}a_{n-1}^{l} $$

$$ {}_{1}^{k}C_{n-1}^{l} = -r_n^m \left({}_{k}a_{n-1}^{l} + \frac{(n-1)}{(n+1)} \, {}_{k}d_n^{l} \right) $$

$$ {}_{1}^{k}D_{n-1}^{l} = \begin{cases} i r_n^m \left({}_{k}c_{n-1}^{l} - \frac{(n-1)}{(n+1)} \, {}_{k}b_n^{l} \right) \\ \quad + (-1)^{l} (k-3+1) (2\bar{\omega} \, g_n^m) & \text{für } n \geq m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} $$

$$ {}_{1}^{k}E_{n}^{l} = i \left(s_n^m \, {}_{k}c_{n-1}^{l} + t_n^m \, {}_{k}c_{n+1}^{l} - \frac{m^2}{n^3 (n+1)^3} \, {}_{k}b_n^{l} \right) + (-1)^{l} (k-3+1) \left(\frac{\bar{\omega}^2}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega} m}{n^2 (n+1)^2} - \bar{h}_k \right) $$

$$ {}_{1}^{k}F_{n}^{l} = -\left(s_n^m \, {}_{k}a_{n-1}^{l} + t_n^m \, {}_{k}a_{n+1}^{l} + \frac{m^2}{n^3 (n+1)^3} \, {}_{k}d_n^{l} \right) $$

$$ {}_{1}^{k}G_{n+1}^{l} = -u_n^m \left(\frac{{}_{k}d_n^{l}}{n} + \frac{{}_{k}a_{n+1}^{l}}{n+2} \right) $$

$$ {}_{1}^{k}H_{n+1}^{l} = i u_n^m \left(-\frac{{}_{k}b_n^{l}}{n} + \frac{{}_{k}c_{n+1}^{l}}{n+2} \right) + (-1)^{l} (k-3+1) 2\bar{\omega} \, f_n^m $$

$$ {}_{1}^{k}K_{n+2}^{l} = i v_n^m \, {}_{k}c_{n+1}^{l} $$

$$ {}_{1}^{k}L_{n+2}^{l} = -v_n^m \, {}_{k}a_{n+1}^{l} $$

(3.31)

und für j = 2:

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}_{k}A^{l}_{n-2} &= -q^{m}_{n}\ {}^{d}_{k}{}^{l}_{n-1} \\ {}^{2}_{k}B^{l}_{n-2} &= -iq^{m}_{n}\ {}^{b}_{k}{}^{l}_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{für } n \geq m+2 \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}_{k}C^{l}_{n-1} &= ir^{m}_{n}\left(- {}^{b}_{k}{}^{l}_{n-1} + \frac{(n-1)}{(n+1)}\ {}^{c}_{k}{}^{l}_{n}\right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l}(k-3+1)\,2\bar{\omega}\ g^{m}_{n}\right) \\ {}^{2}_{k}D^{l}_{n-1} &= -r^{m}_{n}\left({}^{d}_{k}{}^{l}_{n-1} + \frac{(n-1)}{(n+1)}\ {}^{a}_{k}{}^{l}_{n}\right. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{für } n \geq m+1 \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

$${}^{2}_{k}E^{l}_{n} = -\left(s^{m}_{n}\ {}^{d}_{k}{}^{l}_{n-1} + t^{m}_{n}\ {}^{d}_{k}{}^{l}_{n+1} + \frac{m^{2}}{n^{3}(n+1)^{3}}\ {}^{a}_{k}{}^{l}_{n}\right.$$

$${}^{2}_{k}F^{l}_{n} = -i\left(s^{m}_{n}\ {}^{b}_{k}{}^{l}_{n-1} + t^{m}_{n}\ {}^{b}_{k}{}^{l}_{n+1} - \frac{m^{2}}{n^{3}(n+1)^{3}}\ {}^{c}_{k}{}^{l}_{n}\right.$$
$$+ (-1)^{l}(k-3+1)\left(\frac{\bar{\omega}^{2}}{n(n+1)} + \frac{2\bar{\omega}m}{n^{2}(n+1)^{2}}\right)$$

$${}^{2}_{k}G^{l}_{n+1} = iu^{m}_{n}\left(\frac{{}^{c}_{k}{}^{l}_{n}}{n} + \frac{{}^{d}_{k}{}^{l}_{n+1}}{n+2}\right) + (-1)^{l}(k-3+1)\,2\bar{\omega}\ f^{m}_{n}$$

$${}^{2}_{k}H^{l}_{n+1} = -u^{m}_{n}\left(\frac{{}^{a}_{k}{}^{l}_{n}}{n} + \frac{{}^{d}_{k}{}^{l}_{n+1}}{n+2}\right)$$

$${}^{2}_{k}K^{l}_{n+2} = -v^{m}_{n}\ {}^{d}_{k}{}^{l}_{n+1}$$

$${}^{2}_{k}L^{l}_{n+2} = -iv^{m}_{n}\ {}^{b}_{k}{}^{l}_{n+1}$$

(3.32)

mit :

$$q^{m}_{n} = \frac{(n-m)(n-2)(n-m-1)}{n^{2}(n+1)(2n-1)(2n-3)}$$

$$r^{m}_{n} = \frac{m(n-m)}{n^{3}(n+1)(2n-1)}$$

$$s_n^m = \frac{(n-1)(n^2-m^2)}{n^3(4n^2-1)}$$

$$t_n^m = \frac{(n+2)((n+1)^2-m^2)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$$

$$u_n^m = \frac{m(n+2)(m+n+1)}{n(n+1)^3(2n+3)}$$

$$v_n^m = \frac{(n+3)(n+m+1)(n+m+2)}{n(n+1)^2(2n+3)(2n+5)}$$

(3.30) stellt ein homogenes lineares Gleichungssytem dar mit den Unbekannten Φ_i^{1m}, Φ_i^{2m}, Ψ_i^{1m}, Ψ_i^{2m} $(i \geq m)$.
Beschränkt man sich in der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen auf n_o Glieder, d.h. $m \leq n \leq m+n_o-1$, so erhält man aus (3.30) wegen $j = 1,2$ und $k = 1,2$ insgesamt $4n_o$ Gleichungen mit $4n_o$ Unbekannten Φ_i^{1m}, Φ_i^{2m}, Ψ_i^{1m}, Ψ_i^{2m}, $m \leq i \leq m+n_o-1$.
Ein solches Gleichungssystem besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix null ist.

Gleichungssystem (3.30) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}-h_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & \cdot \\
a_{21} & a_{22}-h_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & \cdot \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & \cdot \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & \cdot \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-h_1 & a_{56} & a_{57} & a_{58} & \cdot \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}-h_2 & a_{67} & a_{68} & \cdot \\
a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & \cdot \\
a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
{}^1\phi^m_n \\ {}^2\phi^m_n \\ {}^1\psi^m_n \\ {}^2\psi^m_n \\ {}^1\phi^m_{m+1} \\ {}^2\phi^m_{m+1} \\ {}^1\psi^m_{m+1} \\ {}^2\psi^m_{m+1} \\ \cdot
\end{pmatrix}
= \underline{0} \qquad (3.33)
$$

Die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite von (3.33) kann wie in Kapitel 2 verdichtet werden und hat dann die Form:

$$
\begin{pmatrix}
a'_{11}-\bar{h}_1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & \cdot \\
a'_{21} & a'_{22}-\bar{h}_2 & a'_{23} & a'_{24} & \cdot \\
a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\bar{h}_1 & a'_{34} & \cdot \\
a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44}-\bar{h}_2 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix} \qquad (3.33a)
$$

Auf der Diagonalen stehen alternierend die normierten Separationskonstanten $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$.

Im Unterschied zu Kapitel 2 führt daher die Forderung nach verschwindender Determinante nicht zu einem diskreten Satz von äquivalenten Tiefen. So können wir zum Beispiel für $\bar{h}_2$ einen beliebigen Wert annehmen und dann durch weiteres Verdichten (3.33a) auf die Form bringen:

$$\begin{pmatrix} a''_{11}-\bar{h}_1 & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} & \cdot \\ a''_{21} & a''_{22}-\bar{h}_2 & a''_{23} & a''_{24} & \cdot \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33}-\bar{h}_1 & a''_{34} & \cdot \\ a''_{41} & a''_{42} & a''_{43} & a''_{44}-\bar{h}_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad (3.33b)$$

Die Determinante von (3.33b) soll den Wert 0 annehmen, und das führt wie in Kapitel 2 zu einem Satz von Eigenwerten h_{1i}, $1 \le i \le n_o/2$.

Setzen wir umgekehrt $\bar{h}_1$ in (3.33b) beliebig an, so erhalten wir diskrete Eigenwerte $\bar{h}_{2i}$, $1 \le i \le n_o/2$, also:

$$\mathfrak{D} \ni \bar{h}_1 \rightarrow \begin{cases} \bar{h}_{21}(\bar{h}_1) \\ \bar{h}_{22}(\bar{h}_1) \\ \bar{h}_{23}(\bar{h}_1) \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} \qquad \text{oder } \mathfrak{D} \ni \bar{h}_2 \rightarrow \begin{cases} \bar{h}_{11}(\bar{h}_2) \\ \bar{h}_{12}(\bar{h}_2) \\ \bar{h}_{13}(\bar{h}_2) \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

Die Willkür in der Wahl der äquivalenten Tiefe h_1 oder h_2 verschwindet allerdings, wenn man berücksichtigt, daß die Wellenmoden in den verschiedenen Schichten außer durch die Feldlinien des Erdmagnetfeldes zusätzlich miteinander gekoppelt sind, um gewisse Randbedingungen an der Grenzfläche zwischen den beiden Schichten zu erfüllen. Diese"mechanische Kopplung" wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Zuvor aber wollen wir die Größen Ψ^{1m}_{m}, Ψ^{2m}_{m}, Ψ^{1m}_{m+1}, Ψ^{2m}_{m+1},... in (3.33) eliminieren. Dazu ordnen wir zunächst die Zeilen und Spalten so um , daß sich (3.33) schreibt:

$$
\begin{pmatrix}
\overbrace{\begin{matrix}
a_{11}-\bar{h}_1 & a_{12} & a_{15} & a_{16} & \cdots \\
a_{21} & a_{22}-\bar{h}_2 & a_{25} & a_{26} & \cdots \\
a_{51} & a_{52} & a_{55}-\bar{h}_1 & a_{56} & \cdots \\
a_{61} & a_{62} & a_{65} & a_{66}-\bar{h}_2 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{36} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{46} & \cdots \\
a_{71} & a_{72} & a_{75} & a_{76} & \cdots \\
a_{81} & a_{82} & a_{85} & a_{86} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{matrix}}^{M_1}
&
\overbrace{\begin{matrix}
a_{13} & a_{14} & a_{17} & a_{18} \\
a_{23} & a_{24} & a_{27} & a_{28} \\
a_{53} & a_{54} & a_{57} & a_{58} \\
a_{63} & a_{64} & a_{67} & a_{68} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{33} & a_{34} & a_{37} & a_{38} \\
a_{43} & a_{44} & a_{47} & a_{48} \\
a_{73} & a_{74} & a_{77} & a_{78} \\
a_{83} & a_{84} & a_{87} & a_{88} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{matrix}}^{M_2}
\\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M_3}
&
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M_4}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\phi^{1m}_{m} \\
\phi^{2m}_{m} \\
\phi^{1m}_{m+1} \\
\phi^{2m}_{m+1} \\
\cdot \\
\psi^{1m}_{m} \\
\psi^{2m}_{m} \\
\psi^{1m}_{m+1} \\
\psi^{2m}_{m+1} \\
\cdot
\end{pmatrix}
= \underline{0} \qquad (3.34)
$$

Die Koeffizientenmatrix kann, wie angedeutet, in vier Untermatrizen aufgeteilt werden. Bezeichnen wir der Vereinfachung wegen die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} \Phi^{1m}_{m} \\ \Phi^{2m}_{m} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi^{1m}_{m} \\ \Psi^{2m}_{m} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$ mit Φ bzw. Ψ, so folgt aus (3.34):

$$M1\Phi + M2\Psi = 0 \tag{3.35}$$

$$M3\Phi + M4\Psi = 0, \tag{3.36}$$

wobei $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ nur in der Diagonalen von M1 auftreten.

Aus (3.36) ergibt sich

$$\Psi = -M4^{-1} \cdot M3\Phi \tag{3.37}$$

und mit (3.35) folgt:

$$(M1 - M2 \cdot M4^{-1} \cdot M3)\Phi = 0 \tag{3.38}$$

Das Gleichungssystem (3.38) muß von den Koeffizienten ${}_{n'}\Phi^{1m}_{j}$ ($j \geq m$) eines jeden Modes (m,n') in der unteren Schicht und den Koeffizienten ${}_{n'}\Phi^{2m}_{j}$ des entsprechenden Modes in der oberen Schicht erfüllt werden. Es hat die Form:

$$\begin{pmatrix} c_{11}-n'\bar{h}_1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \cdot \\ c_{21} & c_{22}-n'\bar{h}_2 & c_{23} & c_{24} & \cdot \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-n'\bar{h}_1 & c_{34} & \cdot \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}-n'\bar{h}_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'\Phi^{1m}_{m} \\ n'\Phi^{2m}_{m} \\ n'\Phi^{1m}_{m+1} \\ n'\Phi^{2m}_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad (3.39)$$

Gleichungssystem (3.39) muß zusammen mit einem Satz von Gleichungen, die sich aus den Bedingungen der mechanischen Kopplung ergeben, gelöst werden.

Mechanische Kopplung

An der Trennfläche zweier homogener Schichten müssen bestimmte Randbedingungen erfüllt sein. Die erste, kinematische Bedingung fordert, daß die vertikale Verschiebung des Mediums an der mitbewegten Fläche stetig ist und die zweite, dynamische Bedingung verlangt die Stetigkeit des Druckes senkrecht zur gestörten Fläche.

Nach Volland und Mayr (1977) existieren in einer isothermen nichtdissipativen Schicht ungekoppelte auf- und abwärtslaufende charakteristische Wellen des Druckes und des vertikalen Windes, deren meridionale Struktur die Form hat:

$$\bar{W} = \bar{w}^m_{n'}\ \theta^m_{n'}(\nu)$$
$$\bar{P} = \bar{p}^m_{n'}\ \theta^m_{n'}(\nu) \qquad (3.40)$$

wo (m,n') den Wellenmode bezeichnet und $\theta^m_{n'}$ die zugehörige Hough-Funktion darstellt.

Dabei ist:

$$\bar{P} = (p + i\bar{W}\frac{dp_o}{dz})/p_o$$
$$\bar{W} = \frac{w}{\omega} \qquad (3.41)$$

wo p = Druck

w = vertikaler Wind

p_o = Druck im ungestörten Zustand

Aus den genannten Randbedingungen folgt, daß die $\overline{P}$ und $\overline{W}$ an der Trennfläche der beiden Schichten stetig sein müssen (Volland und Mayr, 1977). Da der Druck und der vertikale Wind erzeugt werden durch die Überlagerung aller beteiligten Wellenmoden, muß gelten, daß:

$$\sum_{n' \geq m} \overline{w}^m_{n'}, \theta^m_{n'}, (z') \qquad \text{und} \qquad \sum_{n' \geq m} \overline{p}^m_{n'}, \theta^m_{n'}, (z')$$

stetig sind an der Grenze zwischen Schicht 1 und Schicht 2. Dort muß also die Bedingung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \sum_{n' \geq m} {}^1\overline{p}^m_{n'}, {}^1\theta^m_{n'} &= \sum_{n' \geq m} {}^2\overline{p}^m_{n'}, {}^2\theta^m_{n'} \\ \sum_{n' \geq m} {}^1\overline{w}^m_{n'}, {}^1\theta^m_{n'} &= \sum_{n' \geq m} {}^2\overline{w}^m_{n'}, {}^2\theta^m_{n'} \end{aligned} \qquad (3.42)$$

wobei sich die Indizes 1,2 auf die jeweilige Schicht beziehen.

Nehmen wir - wie in Abbildung 4 dargestellt - den einfachsten Fall nur einer in der unteren Schicht hochlaufenden Welle (m,k') an, so wird diese an der Trennfläche alle möglichen Wellenmoden anregen, welche in Schicht 1 nach unten und in Schicht 2 nach oben laufen.

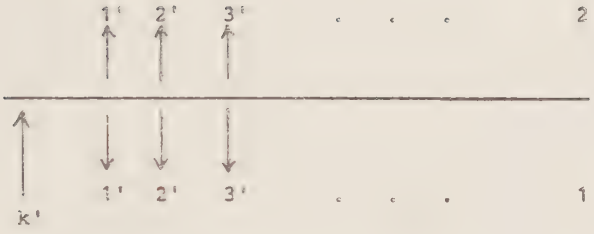


Abb.4: Schematische Darstellung einer aufsteigenden Welle und der an der Grenzfläche erzeugten Wellenmoden

Die Randbedingungen (3.42) fordern dann:

$$\begin{aligned} {}^{1-}p^{m}_{ak'}\ {}^{1}\theta^{m}_{ak'} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^{1-}p^{m}_{bn'}\ {}^{1}\theta^{m}_{bn'} &= \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^{2-}p^{m}_{an'}\ {}^{2}\theta^{m}_{an'} \\ {}^{1-}w^{m}_{ak'}\ {}^{1}\theta^{m}_{ak'} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^{1-}w^{m}_{bn'}\ {}^{1}\theta^{m}_{bn'} &= \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^{2-}w^{m}_{an'}\ {}^{2}\theta^{m}_{an'} \end{aligned} \qquad (3.43)$$

wobei a, b die hochlaufenden bzw. abwärtslaufenden Wellen bezeichnen.

Die Summation in (3.43) erfolgt eigentlich bis unendlich, man kann aber annehmen, daß in der Praxis nur eine sehr begrenzte Anzahl von Moden von Bedeutung ist (Hong und Lindzen, 1975; Mayr und Harris, 1976). Auf die Güte der Näherung einer endlichen Anzahl l beteiligter Wellenmoden wird in Kapitel 6 eingegangen.

Nach Volland und Mayr (1977) besteht nun für jeden Mode innerhalb der homogenen Schicht die Beziehung:

$$\overline{W}_a = \overline{P}_a / F_a$$
$$\overline{W}_b = \overline{P}_b / F_b \qquad (3.44)$$

Dabei ist

$$F^a_b = \frac{2H/h - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\kappa H}{h}}}{2iH^2/h}$$

wo h = Äquivalente Tiefe des betreffenden Modes

H = Skalenhöhe in der jeweiligen Schicht

$\kappa = (\gamma-1)/\gamma$ mit $\gamma = c_p/c_v$

Aus (3.41) und (3.44) folgt:

$$\overline{P}^a_b = \frac{F^a_b}{F^a_b + \frac{1}{H}} \frac{p^a_b}{p_o} = \frac{F^a_b}{F^a_b + \frac{1}{H}} \theta^a_b \qquad (3.45)$$

mit $H = -p_o/(dp_o/dz)$

Somit gilt unter Beachtung von (3.40) für die Koeffizienten in (3.43)

$$k\text{-}am_{P_{bn'}} = \frac{k_{F^{am}_{bn'}}}{k_{F^{am}_{bn'}} + \frac{1}{H_k}}$$

$$k\text{-}am_{W_{bn'}} = \frac{1}{k_{F^{am}_{bn'}} + \frac{1}{H_k}} \qquad k=1,2 \qquad (3.46)$$

Die Gleichungen (3.43) stellen im Falle des elektrisch ungekoppelten Dynamomodells ein lineares System dar, das unabhängig von (2.27) bzw. (2.28) gelöst wird und die relativen Amplituden der Wellenmoden festlegt. Dagegen bilden die Gleichungen (3.43) in dem die elektrische Kopplung berücksichtigenden Modell zusammen mit (3.39) ein nichtlineares Gleichungssystem, das simultan gelöst werden muß. Dies soll im folgenden näher erläutert werden.

a) ohne elektrische Kopplung

Für die Hough-Funktionen gilt die Beziehung:

$$ {}^{k}\theta^{m}_{n'} = -\frac{{}^{k}h^{m}_{n'}}{i\omega H_k}\,\Delta\,{}^{k}\Phi^{m}_{n'} = \frac{{}^{k}h^{m}_{n'}}{i\omega H_k}\sum_{n\geq m}\frac{n(n+1)}{r_o^2}\,{}^{k}\Phi^{m}_{n'n}\,P^{m}_{n} $$

Dabei sind die ${}^{k}\Phi^{m}_{n'n}$ beliebig normierbare Lösungen des homogenen Gleichungssystems (2.27) bzw. (2.28) und die ${}^{k}h^{m}_{n'}$ die zugehörigen Eigenwerte der Welle (m,n') in den beiden Schichten. Mit den ${}^{k}\Phi^{m}_{n'n}$ sind auch ${}^{k}c^{m}_{n'}\,{}^{k}\Phi^{m}_{n'n}$ Lösungen von (2.27) bzw. (2.28), wobei ${}^{k}c^{m}_{n'}$ beliebige Konstanten seien. Daher können wir die Hough-Funktionen in (3.43) darstellen als:

$$ {}^{k}\theta^{am}_{bn'} = \frac{{}^{k}h^{m}_{n'}}{i\omega H_k}\sum_{n\geq m}\frac{n(n+1)}{r_o^2}\,{}^{k}c^{am}_{bn'}\,{}^{k}\Phi^{m}_{n'n}\,P^{m}_{n} \qquad (3.47) $$

Setzen wir diesen Ausdruck in (3.43) ein und integrieren nach Multiplikation mit P_j^m ($m \leq j \leq m+l-1$) beide Seiten der Gleichungen von 0 bis π, so erhalten wir wegen der Orthogonalität der P_n^m :

$$
\begin{aligned}
&{}^1\bar{p}^m_{ak'} \frac{{}^1h^m_{k'}}{H_1}\, {}^1c^m_{ak'}\, {}^1\phi^m_{k'j} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^1\bar{p}^m_{bn'} \frac{{}^1h^m_{n'}}{H_1}\, {}^1c^m_{bn'}\, {}^1\phi^m_{n'j} \\
&\qquad - \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^2\bar{p}^m_{an'} \frac{{}^2h^m_{n'}}{H_2}\, {}^2c^m_{an'}\, {}^2\phi^m_{n'j} = 0 \qquad (3.48)\\
&{}^1\bar{w}^m_{ak'} \frac{{}^1h^m_{k'}}{H_1}\, {}^1c^m_{ak'}\, {}^1\phi^m_{k'j} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^1\bar{w}^m_{bn'} \frac{{}^1h^m_{n'}}{H_1}\, {}^1c^m_{bn'}\, {}^1\phi^m_{n'j} \\
&\qquad - \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^2\bar{w}^m_{an'} \frac{{}^2h^m_{n'}}{H_2}\, {}^2c^m_{an'}\, {}^2\phi^m_{n'j} = 0
\end{aligned}
$$

$m \leq j \leq m+l-1$

Die Größe der Amplitude ${}^1c^m_{ak'}$ der aufsteigenden Welle (m,k') kann frei gewählt werden. Dann stellt (3.48) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit den 21 Unbekannten ${}^1c^m_{bn'}$, ${}^2c^m_{an'}$ und 21 Gleichungen dar. Mit den eindeutigen Lösungen von (3.48) erhalten wir die Hough-Funktionen (3.47), welche die geforderten Randbedingungen (3.43) erfüllen.

b) Mit elektrischer Kopplung

Die Koeffizienten ${}^1\phi^m_{n'n}$ und ${}^2\phi^m_{n'n}$ in der Entwicklung der Hough-Funktionen in Schicht 1 und 2 sind wegen (3.39) nicht mehr unabhängig voneinander. Da außerdem in (3.39)

$${}^1h^m_{n'} = {}^1\bar{h}^m_{n'} \cdot h_o \quad \text{oder} \quad {}^2h^m_{n'} = {}^2\bar{h}^m_{n'} \cdot h_o$$

zunächst beliebig gewählt werden können, stellt (3.39) noch kein Bestimmungssystem für die ${}^1\phi^m_{n'n}$, ${}^2\phi^m_{n'n}$ dar.
Für die Hough-Funktionen in (3.43) schreiben wir:

$$k_\theta a^m_{bn'} = \frac{k_h{}^m_{n'}}{i\omega H_k} \sum_{n\geq m} \frac{n(n+1)}{r_o^2}\, k_\phi a^m_{bn'n}\, P^m_n$$

Dann erhalten wir nach Multiplikation mit P^m_j und anschließender Integration wie oben:

$$\begin{aligned}
&{}^1\bar{P}^m_{ak'} \frac{{}^1h^m_{k'}}{H_1} {}^1\phi^m_{ak'j} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^1\bar{P}^m_{bn'} \frac{{}^1h^m_{n'}}{H_1} {}^1\phi^m_{bn'j} \\
&\qquad - \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^2\bar{P}^m_{an'} \frac{{}^2h^m_{n'}}{H_2} {}^2\phi^m_{an'j} = 0 \\
&{}^1\bar{w}^m_{ak'} \frac{{}^1h^m_{k'}}{H_1} {}^1\phi^m_{ak'j} + \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^1\bar{w}^m_{bn'} \frac{{}^1h^m_{n'}}{H_1} {}^1\phi^m_{bn'j} \\
&\qquad - \sum_{n'=m}^{m+l-1} {}^2\bar{w}^m_{an'} \frac{{}^2h^m_{n'}}{H_2} {}^2\phi^m_{an'j} = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Für jedes $n' \neq k'$ müssen die ${}^{1}\Phi^{m}_{bn'j}$ und ${}^{2}\Phi^{m}_{an'j}$ das Gleichungssystem (3.39) simultan erfüllen. Dies folgt aus der Bedingung, daß jeder Mode (m,n') in Schicht 1, wo er nur als abwärtslaufende Welle und in Schicht 2, wo er nur als aufwärtslaufende Welle existiert, das jeweils gleiche elektrische Feld erzeugt.

Zum Mode (m,k') gibt es jedoch in Schicht 1 eine auf- und abwärtslaufende Welle, deren gesamtes elektrisches Feld gleich dem Feld der in Schicht 2 hochlaufenden Welle (m,k') sein muß. Demnach müssen die ${}^{1}\Phi^{m}_{ak'j} + {}^{1}\Phi^{m}_{bk'j}$, ${}^{2}\Phi^{m}_{ak'j}$ das System (3.39) erfüllen.

Um dies zu berücksichtigen, betrachten wir die Welle ${}^{2}\theta^{m}_{ak'}$ als aus zwei Anteilen ${}^{2\tilde{}}\theta^{m}_{ak'}$, ${}^{2\tilde{\tilde{}}}\theta^{m}_{ak'}$ zusammengesetzt, wobei ${}^{1}\theta^{m}_{ak'}$, ${}^{2\tilde{}}\theta^{m}_{ak'}$ und ${}^{1}\theta^{m}_{bk'}$, ${}^{2\tilde{\tilde{}}}\theta^{m}_{ak'}$ ein jeweils gleiches elektrisches Feld erzeugen. Dann müssen die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten ${}^{1}\Phi^{m}_{ak'j}$, ${}^{2\tilde{}}\Phi^{m}_{ak'j}$ und ${}^{1}\Phi^{m}_{bk'j}$, ${}^{2\tilde{\tilde{}}}\Phi^{m}_{ak'j}$ (3.39) erfüllen, und da sie Lösungen zu den gleichen Eigenwerten ${}^{1}\bar{h}^{m}_{k'}$, ${}^{2}\bar{h}^{m}_{k'}$ darstellen, gilt:

$$\begin{aligned} {}^{1}\Phi^{m}_{ak'j} &= f^{m}_{k'}\ {}^{1}\Phi^{m}_{bk'j} \\ {}^{2\tilde{}}\Phi^{m}_{ak'j} &= f^{m}_{k'}\ {}^{2\tilde{\tilde{}}}\Phi^{m}_{ak'j} \end{aligned} \quad \text{, wo } f^{m}_{k'} \text{ eine Konstante ist.} \qquad (3.50)$$

Die Gleichungen (3.39) und (3.49) sind homogen und linear in den ${}^{1}\Phi^{m}_{bn'j}$, ${}^{2}\Phi^{m}_{an'j}$, so daß wir die Koeffizienten mit einem beliebigen Faktor f_o multiplizieren können.

Wir wählen f_o so, daß ${}^1\phi^m_{ak'j} = 1$, woraus folgt:

$$f^m_{k'} = 1/\,{}^1\phi^m_{bk'1} \tag{3.51}$$

Der Einfachheit halber wollen wir folgende Umbenennung vornehmen:

$$x^{n'}_j = {}^1\phi^m_{bn'j}$$

$$y^{n'}_j = {}^2\phi^m_{an'j} \qquad \text{für } n' \neq k'$$

$$y^{k'}_j = {}^2\tilde{\phi}^m_{an'j}$$

und

$$p^o_{k'} = {}^1\bar{p}^m_{ak'} \frac{{}^1\bar{h}^m_{k'}\, h_o}{H_1} \quad , \quad w^o_{k'} = {}^1\bar{w}^m_{ak'} \frac{{}^1\bar{h}^m_{k'}\, h_o}{H_1}$$

$$p^1_{n'} = {}^1\bar{p}^m_{bk'} \frac{{}^1\bar{h}^m_{n'}\, h_o}{H_1} \quad , \quad w^1_{n'} = {}^2\bar{w}^m_{bn'} \frac{{}^1\bar{h}^m_{n'}\, h_o}{H_1}$$

$$p^2_{n'} = {}^2\bar{p}^m_{an'} \frac{{}^2\bar{h}^m_{n'}\, h_o}{H_2} \quad , \quad w^2_{n'} = {}^2\bar{w}^m_{an'} \frac{{}^2\bar{h}^m_{n'}\, h_o}{H_2}$$

Dann schreiben sich die Gleichungen (3.39) und (3.49) unter Berücksichtigung von (3.50), (3.51):

$$\begin{pmatrix} c_{11}-{}^{1}\bar{h}^{m}_{n'} & c_{12} & \cdots & c_{1,21-1} & c_{1,21} \\ c_{21} & c_{22}-{}^{2}\bar{h}^{m}_{n'} & \cdots & c_{2,21-1} & c_{2,21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{21-1,1} & c_{21-1,2} & & c_{21-1,21-1}-{}^{1}\bar{h}^{m}_{n'} & c_{21-1,1} \\ c_{21,1} & c_{21,2} & & c_{21,21-1} & c_{21,21}-{}^{2}\bar{h}^{m}_{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{n'}_{m} \\ y^{n'}_{m} \\ \vdots \\ x^{n'}_{m+1-1} \\ y^{n'}_{m+1-1} \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.52a)$$

$$m \leq n' \leq m+1-1$$

$$p^{o}_{k'} \frac{x^{k'}_{j}}{x^{k'}_{m}} + \sum_{n'} p^{1}_{n'} x^{n'}_{j} - \sum_{n'} p^{2}_{n'} y^{n'}_{j} - p^{2}_{k'} \frac{y^{k'}_{j}}{x^{k'}_{m}} = 0 \qquad (3.52)$$

$$w^{o}_{k'} \frac{x^{k'}_{j}}{x^{k'}_{m}} + \sum_{n'} w^{1}_{n'} x^{n'}_{j} - \sum_{n'} w^{2}_{n'} y^{n'}_{j} - w^{2}_{k'} \frac{y^{k'}_{j}}{x^{k'}_{m}} = 0 \qquad (3.52b)$$

$$m \leq j \leq m+1-1$$

(3.52a) besteht aus 1·21 Gleichungen und (3.52b) aus 21 Gleichungen. Es existieren 1·21 Unbekannte $X_m^{n'}$, $X_{m+1}^{n'}$, ..., $X_{m+l-1}^{n'}$, $Y_m^{n'}$, $Y_{m+1}^{n'}$, ..., $Y_{m+l-1}^{n'}$ und 21 Unbekannte ${}^1\bar{h}_{n'}^m$, , ${}^2\bar{h}_{n'}^m$. Insgesamt stellt (3.52) also ein System aus $2(l^2+1)$ Unbekannten und ebensovielen nichtlinearen Gleichungen dar. Insbesondere hängen die Größen p_k^o, , $p_{n'}^1$, , $p_{n'}^2$, und w_k^o, , $w_{n'}^1$, , $w_{n'}^2$, über (3.46) in recht komplizierter Weise von den ${}^1\bar{h}_{n'}^m$, , ${}^2\bar{h}_{n'}^m$, ab.

Die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems ergibt die Entwicklungskoeffizienten $X_j^{n'}$, $Y_j^{n'}$ der modifizierten Hough-Funktionen in der E- und in der F-Schicht und ihre normierten äquivalenten Tiefen ${}^1\bar{h}_{n'}^m$, , ${}^2\bar{h}_{n'}^m$, für die verschiedenen Moden n'.

4. Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Das Gleichungssystem (3.52) wurde im Prinzip mit dem verallgemeinerten Newton'schen Iterationsverfahren gelöst. Diese Methode besteht im folgenden:

Angenommen, man habe n stetig differenzierbare Funktionen f_1, f_2 ..., f_n (reell-oder komplexwertig), die jeweils von n Unbekannten x_1, x_2,..., x_n abhängen. Gesucht sei ein n-Tupel $\hat{x}^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ mit $f_1(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o) = f_2(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o) = \ldots = f_n(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o) = 0$.
(Ein solcher Fall liegt mit (3.52) vor.)
Bildet man nun eine Folge von Vektoren $\hat{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ nach der Rechenvorschrift:

$$\hat{x}^{i+1} = \hat{x}^i - (F'_{\hat{x}^i})^{-1} \cdot F(\hat{x}^i), \qquad (4.1)$$

so ist der Grenzwert der Folge, falls sie konvergiert, gleich $\hat{x}_o$ (Ralston,A.).
Dabei ist:

$$F(\hat{x}^i) = \begin{pmatrix} f_1(\hat{x}^i) \\ f_2(\hat{x}^i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(\hat{x}^i) \end{pmatrix}$$

und

$$F'_{\hat{x}^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\hat{x}^i}$$

die Jacobi-Matrix an der Stelle $\hat{x}^i$.

Es ist notwendig für die Konvergenz der Folge, daß der Anfangswert $\hat{x}^1$ hinreichend nahe beim Lösungsvektor $\hat{x}^\circ$ liegt. Die Schwierigkeit in der Anwendung dieses Verfahrens auf das Gleichungssystem (3.52) besteht deshalb darin, einen Satz von Werten $X_m^{n'}$, $Y_m^{n'}$, $X_{m+1}^{n'}$, $Y_{m+1}^{n'}$, ... zu finden, der sich in ausreichender Nachbarschaft zu der Lösung von (3.52) befindet. Der naheliegende Ansatz, hierfür die Koeffizienten der Hough-Funktionen der nicht elektrisch gekoppelten Moden zu nehmen, führte nicht zum Erfolg.

Um das Newton-Verfahren für einen beliebigen Anfangswert anwenden zu können, wurde zunächst versucht, folgendermaßen vorzugehen:

Seien $\underline{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ ein beliebiger Vektor und $f_1(\underline{x}^1) = a_1$, $f_2(\underline{x}^1) = a_2$, ..., $f_n(\underline{x}^1) = a_n$ die zugehörigen Funktionswerte. Betrachten wir das Gleichungssystem

$$f_i^*(\underline{x},\varepsilon) = f_i(\underline{x}) - \varepsilon a_i, \qquad 1 \le i \le n,$$

und bezeichnen wir mit $\underline{x}^0(\varepsilon)$ den Lösungsvektor dieses Systems, so gilt:

$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0(1), \text{ da } f_i^*(\underline{x}^1) - a_i = 0.$$

Da die f_i wegen der Differenzierbarkeit stetig sind (und damit auch die f_i^*), kann man ein ε_1 so nahe bei 1 wählen, daß sich $\underline{x}^0(1)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von der Lösung $\underline{x}^0(\varepsilon_1)$ des Systems $f_i^*(\underline{x},\varepsilon_1)$ befindet. Dann kann man erwarten, daß die nach (4.1) gebildete Folge mit dem Anfangsglied $\underline{x}^0(1)$ gegen $\underline{x}^0(\varepsilon_1)$ konvergiert.

Sodann nimmt man ein ε_2 ($<\varepsilon_1$), dessen Abstand zu ε_1 so klein ist, daß die Folge mit dem Anfangswert $\underline{x}^0(\varepsilon_1)$ gegen den Lösungsvektor des Gleichungssystems $f_i^*(\underline{x},\varepsilon_2)$ konvergiert. Dieses Verfahren setzt man mit schrittweise kleiner werdendem Parameter ε so lange fort, bis die gewünschte Lösung $\underline{x}^0(0)$ des Systems $f_i^*(\underline{x},0) = f_i(\underline{x})$ erreicht ist.

Probeweise wurde diese Methode auf das Teilsystem (3.52b) angewandt. Sie war erfolgreich bei einer Schrittweite der ε-Werte von 1/100. Die Folge (4.1) konvergierte sehr schnell, schon nach 5 Iterationen betrug die relative Abweichung vom Grenzwert

weniger als 10^{-5}.

Beim Gesamtsystem (3.52) allerdings konvergierten die $x_j^{n'}$, $y_j^{n'}$ mit kleiner werdendem ε gegen O, obwohl $x_m^{k'}$ in (3.52b) im Nenner steht. Mit ε gegen O strebte nämlich auch stets $x_j^{k'}/x_m^{k'}$ und $y_j^{k'}/y_m^{k'}$ gegen O. Selbst eine Division der Gleichungen durch ein $(x_j^{n'})^n$, wo n eine beliebig hohe Potenz darstellt, änderte nichts am Konvergenzverhalten.

Das dargestellte allgemeine Verfahren, das die spezielle Form der Gleichungen unberücksichtigt läßt, funktioniert also nicht in allen Fällen.

Man kann aber nach einer ähnlichen Methode vorgehen, wenn man von den Gleichungen des elektrisch ungekoppelten Systems ausgeht und diese wie oben in hinreichend kleinen Schritten dem System (3.52) annähert, wobei die jeweiligen Lösungen ebenfalls als Anfangswerte für den nächsten Schritt dienen.

Die Gleichungssysteme (2.27), (2.28) in Kapitel 2 haben nach Elimination der Ψ_n^m die Form:

$$\begin{pmatrix} e_{11}-\bar{h}_{n'}^{-1}, e_{13} & e_{15} & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{31} & e_{33}-\bar{h}_{n'}^{-1}, e_{35} & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{51} & e_{53} & e_{55}-\bar{h}_{n'}^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m^{n'} \\ x_{m+2}^{n'} \\ x_{m+4}^{n'} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad (4.2)$$

(symmetrisch)

$$\begin{pmatrix} e_{22}-\bar{h}^1_{n'} & e_{24} & e_{26} & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{42} & e_{44}-\bar{h}^1_{n'} & e_{46} & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{62} & e_{64} & e_{66}-\bar{h}^1_{n'} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{n'}_{m+1} \\ x^{n'}_{m+3} \\ x^{n'}_{m+5} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (4.3)$$

(antisymmetrisch)

wobei wie in (3.52) $\bar{h}^1_{n'}$, $x^{n'}_j$ die äquivalente Tiefe bzw. die Entwicklungskoeffizienten der Hough-Funktionen des n'-ten Modes in der Schicht 1 sind. (Der Index m der zonalen Wellenzahl wird der Einfachheit halber fortgelassen.)

(4.2) und (4.3) lassen sich zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} e_{11}-\bar{h}^1_{n'} & 0 & e_{13} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & e_{22}-\bar{h}^1_{n'} & 0 & e_{24} & \cdot & \cdot \\ e_{31} & 0 & e_{33}-\bar{h}^1_{n'} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & e_{42} & 0 & e_{44}-\bar{h}^1_{n'} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{n'}_m \\ x^{n'}_{m+1} \\ x^{n'}_{m+2} \\ x^{n'}_{m+3} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (4.4)$$

Ein entsprechendes Gleichungssytem erhält man für die Schicht 2:

$$\begin{pmatrix} f_{11}-\bar{h}^2_{n'} & 0 & f_{13} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{22}-\bar{h}^2_{n'} & 0 & f_{24} & \cdot & \cdot \\ f_{31} & 0 & f_{33}-\bar{h}^2_{n'} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{42} & 0 & f_{44}-\bar{h}^2_{n'} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{n'}_m \\ y^{n'}_{m+1} \\ y^{n'}_{m+2} \\ y^{n'}_{m+3} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (4.5)$$

Schließlich lassen sich (4.4) und (4.5) zusammenfassen zu:

$$\begin{pmatrix} e_{11}-\bar{h}_n^1, & 0 & 0 & 0 & e_{13} & 0 & \cdot \\ 0 & f_{11}-\bar{h}_n^2, & 0 & 0 & 0 & f_{13} & \cdot \\ 0 & 0 & e_{22}-\bar{h}_n^1, & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & f_{22}-\bar{h}_n^2, & 0 & 0 & \cdot \\ e_{31} & 0 & 0 & 0 & e_{33}-\bar{h}_n^1, & 0 & \cdot \\ 0 & f_{31} & 0 & 0 & 0 & f_{33}-\bar{h}_n^2, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_m^{n'} \\ Y_m^{n'} \\ X_{m+1}^{n'} \\ Y_{m+1}^{n'} \\ X_{m+2}^{n'} \\ Y_{m+2}^{n'} \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad (4.6)$$

Betrachten wir nun das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{pmatrix}
c_{11}-\delta_{11}(c_{11}-e_{11})-\bar{h}_n^{1}, & c_{12}-\delta_{12}c_{12} & c_{13}-\delta_{13}c_{13} \\
c_{21}-\delta_{21}c_{21} & c_{22}-\delta_{22}(c_{22}-f_{11})-\bar{h}_n^{2}, & c_{23}-\delta_{23}c_{23} \\
c_{31}-\delta_{31}c_{31} & c_{32}-\delta_{32}c_{32} & c_{33}-\delta_{33}(c_{33}-e_{33})-\bar{h}_n^{1}, \\
c_{41}-\delta_{41}c_{41} & c_{42}-\delta_{42}c_{42} & c_{43}-\delta_{43}c_{43} \\
c_{51}-\delta_{51}(c_{51}-e_{31}) & c_{52}-\delta_{52}c_{52} & c_{53}-\delta_{53}c_{53} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
c_{14}-\delta_{14}c_{14} & c_{15}-\delta_{15}(c_{15}-e_{15}) & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{24}-\delta_{24}c_{24} & c_{25}-\delta_{25}c_{25} & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{34}-\delta_{34}c_{34} & c_{35}-\delta_{35}c_{35} & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{44}-\delta_{44}(c_{44}-f_{22})-\bar{h}_n^{2}, & c_{45}-\delta_{45}c_{45} & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{54}-\delta_{54}c_{54} & c_{55}-\delta_{55}(c_{55}-e_{33})-\bar{h}_n^{1}, & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X_m^{n'} \\
Y_m^{n'} \\
X_{m+1}^{n'} \\
Y_{m+1}^{n'} \\
X_{m+2}^{n'} \\
\cdot \quad \cdot
\end{pmatrix}
= \underline{0} \quad (4.7)
$$

Dabei sind die c_{ij} die Matrixelemente in (3.52a) und $0 \leq \delta_{ij} \leq 1$.

Mit $\delta_{ij} = 1$ ist (4.7) identisch mit (4.6) und die Lösungen sind die bereits bekannten des elektrisch ungekoppelten Systems unter Berücksichtigung der mechanischen Kopplung. Sie befriedigen dann auch das Teilsystem (3.52b).

Von diesen Anfangslösungen ausgehend, wurden entsprechend dem obigen Verfahren die δ_{ij} schrittweise verkleinert und jeweils die Newton'sche Methode auf das Gesamtsystem (4.7), (3.52b) angewandt. Für $\delta_{ij} = 0$ schließlich ist (4.7) identisch mit (3.52a) und die Lösung des Systems (3.52) erreicht.

Das Newton'sche Iterationsverfahren ist nicht anwendbar, wenn die Jacobi-Determinante verschwindet, und es konvergiert schlecht (d.h. man braucht viele Iterationsschritte) in der Nähe einer solchen singulären Stelle. Man hat aber die Möglichkeit, die δ_{ij} in (4.7) unabhängig voneinander so zu verkleinern, daß die Singularitäten hinreichend weit umgangen werden. In der Praxis bedeutet das ein stetes Kontrollieren des Konvergenzverhaltens und eventuell durch Probieren, geeignete Schrittweiten für die jeweiligen δ_{ij} zu finden.

Durchgeführt wurde die Rechnung auf der Cyber 172 des Bonner Max-Planck-Institut sfür Radioastronomie im Terminalbetrieb. Die relative Rechenungenauigkeit ist nicht größer als 10^{-5}. Die benötigte Rechenzeit stieg sehr rasch an mit der Dimension des Gleichungssystems (3.52), d.h. mit der Anzahl l der berücksichtigten Wellenmoden. Sie betrug für l=4 mehrere Stunden (für jedes k' =1,2,3,4 und m=1,2, Kapitel 6) und verdreifachte sich nahezu für l=5, so daß ich mich auf die ersten vier Moden beschränkte (Gleichung 3.43).

Als Lösung ergeben sich die normierten äquivalenten Tiefen $\bar{h}^1_{n'}$, $\bar{h}^2_{n'}$ und die Entwicklungskoeffizienten $x^{n'}_j$, $y^{n'}_j$. Im elektrisch ungekoppelten Fall gilt

$$x^{n'}_{m+1} = x^{n'}_{m+3} = x^{n'}_{m+5} = \ldots = 0 \quad \text{und} \quad y^{n'}_m = y^{n'}_{m+2} = y^{n'}_{m+4} = \ldots = 0$$

oder

$$x^{n'}_m = x^{n'}_{m+2} = x^{n'}_{m+4} = \ldots = 0 \quad \text{und} \quad y^{n'}_{m+1} = y^{n'}_{m+3} = y^{n'}_{m+5} = \ldots = 0$$

entsprechend den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Moden.

Das ist nicht mehr so bei den Lösungen des Systems (3.52), so daß man "gemischte" Moden ohne strenge Symmetrie bzw. Antisymmetrie erwartet.

Tatsächlich erhält man auch hier wieder symmetrische bzw. antisymmetrische Wellen-Moden als direkte Folge der Vorzeichenänderung der Hall-Leitfähigkeit von der Nord- zur Südhalbkugel.

Die Änderung des Vorzeichens der Hall-Leitfähigkeit σ_{hk} (k=1,2) hat eine Vorzeichenänderung einiger Koeffizienten des Gleichungssystems (3.20) zur Folge.

Beim Übergang von der Nord- zur Südhemisphäre gilt:

Nord		Süd
σ_{hk}	→	$-\sigma_{hk}$

und daraus nach (3.25a)

β_n^k	→	β_n^k
ε_n^k	→	ε_n^k
γ_n^k	→	$-\gamma_n^k$
δ_n^k	→	$-\delta_n^k$

woraus nach (3.27a) folgt:

a_{kn}^l	→	$-a_{kn}^l$
b_{kn}^l	→	b_{kn}^l
c_{kn}^l	→	c_{kn}^l
d_{kn}^l	→	$-d_{kn}^l$

und schließlich ergibt sich aus (3.31), (3.32) für die Koeffizienten in (3.30):

j=1:		j=2:	
Nord	→ Süd	Nord	→ Süd
${}^{1}_{k}B^{1}_{n-2}$	→ $-{}^{1}_{k}B^{1}_{n-2}$	${}^{2}_{k}A^{1}_{n-2}$	→ $-{}^{2}_{k}A^{1}_{n-2}$
${}^{1}_{k}C^{1}_{n-1}$	→ $-{}^{1}_{k}C^{1}_{n-1}$	${}^{2}_{k}D^{1}_{n-1}$	→ $-{}^{2}_{k}D^{1}_{n-1}$
${}^{1}_{k}F^{1}_{n}$	→ $-{}^{1}_{k}F^{1}_{n}$	${}^{2}_{k}E^{1}_{n}$	→ $-{}^{2}_{k}E^{1}_{n}$
${}^{1}_{k}G^{1}_{n+1}$	→ $-{}^{1}_{k}G^{1}_{n+1}$	${}^{2}_{k}H^{1}_{n+1}$	→ $-{}^{2}_{k}H^{1}_{n+1}$
${}^{1}_{k}L^{1}_{n+2}$	→ $-{}^{1}_{k}L^{1}_{n+2}$	${}^{2}_{k}K^{1}_{n+2}$	→ $-{}^{2}_{k}K^{1}_{n+2}$

Die restlichen Koeffizienten bleiben unverändert.

Unter Berücksichtigung dieser Vorzeichenänderungen schreibt sich System (3.30) (wobei die Gleichungen für j=2 mit -1 multipliziert wurden):

$$
\begin{aligned}
&{}^{j}_{k}A^{1}_{n-2}\,\Phi^{1}_{n-2} + {}^{j}_{k}A^{2}_{n-2}\,\Phi^{2}_{n-2} \pm {}^{j}_{k}B^{1}_{n-2}\,\Psi^{1}_{n-2} \pm {}^{j}_{k}B^{2}_{n-2}\,\Psi^{2}_{n-2} \\
&\pm {}^{j}_{k}C^{1}_{n-1}\,\Phi^{1}_{n-1} \pm {}^{j}_{k}C^{2}_{n-1}\,\Phi^{2}_{n-1} + {}^{j}_{k}D^{1}_{n-1}\,\Psi^{1}_{n-1} + {}^{j}_{k}D^{2}_{n-1}\,\Psi^{2}_{n-1} \\
&+ {}^{j}_{k}E^{1}_{n}\,\Phi^{1}_{n} + {}^{j}_{k}E^{2}_{n}\,\Phi^{2}_{n} \pm {}^{j}_{k}F^{1}_{n}\,\Psi^{1}_{n} \pm {}^{j}_{k}F^{2}_{n}\,\Psi^{2}_{n} \\
&\pm {}^{j}_{k}G^{1}_{n+1}\,\Phi^{1}_{n+1} \pm {}^{j}_{k}G^{2}_{n+1}\,\Phi^{2}_{n+1} + {}^{j}_{k}H^{1}_{n+1}\,\Psi^{1}_{n+1} + {}^{j}_{k}H^{2}_{n+1}\,\Psi^{2}_{n+1} \\
&+ {}^{j}_{k}K^{1}_{n+2}\,\Phi^{1}_{n+2} + {}^{j}_{k}K^{2}_{n+1}\,\Phi^{2}_{n+2} \pm {}^{j}_{k}L^{1}_{n+2}\,\Psi^{1}_{n+2} \pm {}^{j}_{k}L^{2}_{n+2}\,\Psi^{2}_{n+2} = 0 \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{matrix} j=1,2 \\ k=1,2 \end{matrix}
$$

Dabei gilt "+" für die Nord- und "-" für die Südhalbkugel.
(Gleichung (4.8) gilt für alle Wellenmoden, so daß die Indizes m,n' fortgelassen werden.)
Aus (4.8) folgt, daß die Lösungen für die Nord- und die Südhalbkugel auf einfache Weise miteinander korreliert sind, wie die folgende Tabelle zeigt:

Nord	Süd	
$(0 \leq \vartheta \leq \pi/2)$	$(\pi/2 < \vartheta \leq \pi)$	
a)	b) oder	c)
ϕ^k_{n-2}	ϕ^k_{n-2}	$-\phi^k_{n-2}$
Φ^k_{n-1}	$-\Phi^k_{n-1}$	Φ^k_{n-1}
ϕ^k_n	ϕ^k_n	$-\phi^k_n$
Φ^k_{n+1}	$-\Phi^k_{n+1}$	Φ^k_{n+1}
Φ^k_{n+2}	Φ^k_{n+2}	$-\Phi^k_{n+2}$
ψ^k_{n-2}	$-\psi^k_{n-2}$	ψ^k_{n-2}
ψ^k_{n-1}	ψ^k_{n-1}	$-\psi^k_{n-1}$
ψ^k_n	$-\psi^k_n$	ψ^k_n
ψ^k_{n+1}	ψ^k_{n+1}	$-\psi^k_{n+1}$
ψ^k_{n+2}	$-\psi^k_{n+2}$	ψ^k_{n+2}

Es gibt also die beiden möglichen Lösungssätze a)b) oder a)c). Die äquivalenten Tiefen ändern sich nicht und an Hand von (3.49) sieht man, daß mit den Lösungen auf der Nordhalbkugel auch die auf der Südhalbkugel gültigen Lösungen die Bedingungen der mechanischen Kopplung erfüllen.

Für die Hough-Funktionen auf der Nordhalbkugel gilt:

$$\theta^k(\vartheta) \sim \sum_{n=m} n(n+1)\ \Phi_n^k\ P_n^m(\cos\vartheta) \qquad (4.9)$$

$$(0 \leq \vartheta \leq \pi/2)$$

Dann folgt nach der obigen Beziehung für die entsprechende Hough-Funktion auf der südlichen Halbkugel:

$$\theta^k(\vartheta) \sim \sum_{n=m} n(n+1)\ (-1)^{n-m}\ \Phi_n^k\ P_n^m(\cos\vartheta) \qquad (4.10)$$

oder

$$\theta^k(\vartheta) \sim \sum_{n=m} n(n+1)\ (-1)^{n-m+1}\ \Phi_n^k\ P_n^m(\cos\vartheta) \qquad (4.11)$$

$$(\pi/2 < \vartheta \leq \pi\ )$$

Wir können (4.9) und (4.10) in jeweils zwei Summen aufspalten:

$0 \leq \vartheta \leq \pi/2$:

$$\theta^k(\vartheta) \sim \sum_{n_1} n_1(n_1+1)\ \Phi_{n_1}^k\ P_{n_1}^m + \sum_{n_2} n_2(n_2+1)\ \Phi_{n_2}^k\ P_{n_2}^m$$

$\pi/2 < \vartheta \leq \pi$: (4.12)

$$\theta^k(\vartheta) \sim \sum_{n_1} n_1(n_1+1)\ \Phi_{n_1}^k\ P_{n_1}^m + \sum_{n_2} n_2(n_2+1)(-1)\ \Phi_{n_2}^k\ P_{n_2}^m$$

wo $n_1 = m + 2i$

$n_2 = m + 2i + 1$, $i = 0,1,2,...$

Für $\vartheta \leq \pi/2$ gilt:

$$P^m_{n_1}(\pi/2 + \vartheta) = P^m_{n_1}(\pi/2 - \vartheta)$$

$$P^m_{n_2}(\pi/2 + \vartheta) = - P^m_{n_2}(\pi/2 - \vartheta)$$

Dann folgt aus (4.12) :

$$\theta^k(\pi/2 - \vartheta) = \sum_{n_1} n_1(n_1+1)\, \Phi^k_{n_1}\, P^m_{n_1}(\pi/2 - \vartheta) + \sum_{n_2} n_2(n_2+1)\, \Phi^k_{n_2}\, P^m_{n_2}(\pi/2 - \vartheta)$$

$$= \theta^k(\pi/2 + \vartheta)$$

Die durch (4.9) und (4.10) dargestellte Hough-Funktion ist also symmetrisch bezüglich des Äquators. Ebenso folgt, daß die durch (4.9) und (4.11) gegebene Hough-Funktion antisymmetrisch ist. Es gibt also jeweils zwei Lösungen. Die eine repräsentiert einen symmetrischen und die andere einen antisymmetrischen Wellenmode.

Es ist naheliegend, als physikalisch relevante Lösung jene zu nehmen, deren Symmetrie übereinstimmt mit der Symmetrie des entsprechenden Modes ohne elektrische Kopplung. Eine solche Wahl

führt zu Wellenmoden, welche sich in Schicht 1 nur sehr wenig von den ungekoppelten Moden unterscheiden (s.Anhang) und erfüllt die Erwartung einer stetigen Veränderung der Moden unter dem Einfluß der elektrischen Kopplung.

Im Unterschied zum elektrisch ungekoppelten Fall werden hier unabhängig von der Symmetrieform der primären Welle sowohl symmetrische wie antisymmetrische Moden erzeugt. Dieser physikalische Sachverhalt kann folgendermaßen verständlich gemacht werden.

Bei Vernachlässigung der elektrischen Kopplung erzeugt die in der E-Schicht aufsteigende Welle nur jeweils symmetrische oder antisymmetrische Wellenmoden entsprechend ihrer eigenen Symmetrie. Das elektrische Feld eines solchen Modes ist unterschiedlich in der E- und der F-Schicht. Die Bedingung verschwindender Potentialdifferenz entlang der Magnetfeldlinien kann also nicht von rein symmetrischen oder antisymmetrischen Moden erfüllt werden. Der Ausgleich der Potentialdifferenz modifiziert daher die aufsteigende primäre Welle (und damit die von ihr an der Schichtgrenze erzeugten Moden) und bewirkt, daß die Wellenmoden sowohl symmetrische wie antisymmetrische Anteile enthalten. Diese "gemischten Wellentypen" haben die Form:

$$\theta(\nu) \sim \underbrace{\sum_{n_1} n_1(n_1+1)\ \Phi_{n_1}\ P^m_{n_1}(\nu)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\sum_{n_2} n_2(n_2+1)\ \Phi_{n_2}\ P^m_{n_2}(\nu)}_{\text{antisymmetrisch}}$$

wo $n_1 = m + 2i$

$n_2 = m + 2i + 1$ $\qquad i = 0,1,2,\ldots$ (s.(4.12))

(Im elektrisch ungekoppelten Fall sind entweder die Φ_{n_2} oder die Φ_{n_1} gleich 0.)

Bei konstanter Hall-Leitfähigkeit würden nur solche nicht-symmetrischen Wellenmoden existieren.
Doch der antisymmetrische Verlauf der Hall-Leitfähigkeit bezüglich des Äquators spaltet nun diese "gemischten Moden" in zwei Symmetrie-Klassen auf. Wellen der Klasse 1 sind symmetrisch, Wellen der Klasse 2 antisymmetrisch bezüglich des Äquators. Die Erzeugung symmetrischer und antisymmetrischer Moden ist also eine Folge der Vorzeichenänderung der Hall-Leitfähigkeit. Dies führt aber nicht wie im elektrisch ungekoppelten Fall zum Verschwinden der Φ_{n_2} oder Φ_{n_1}, sondern drückt sich mathematisch in einer Vorzeichenänderung der Entwicklungskoeffizienten Φ_{n_1}, Φ_{n_2} aus:

$$\Phi_{n_2}(-\sigma_h) = -\Phi_{n_2}(\sigma_h)$$
$$\Phi_{n_1}(-\sigma_h) = \Phi_{n_1}(\sigma_h) \qquad \text{symmetrisch (s.(4.9),(4.10))}$$

$$\Phi_{n_2}(-\sigma_h) = \Phi_{n_2}(\sigma_h)$$
$$\Phi_{n_1}(-\sigma_h) = -\Phi_{n_1}(\sigma_h) \qquad \text{antisymmetrisch (s.(4.9),(4.10))}$$

Auf die elektrisch ungekoppelten Moden bleibt die Vorzeichenänderung der Hall-Leitfähigkeit ohne Einfluß, da sie unabhängig hiervon als Wellen des rein symmetrischen oder antisymmetrischen Typs auftreten. Im Vergleich zu den gekoppelten Moden sind sie von vorneherein (auch bei angenommenem konstantem σ_h) einer der beiden "Klassen" zugehörig, so daß die Änderung der Hall-Leitfähigkeit keine Wellenmoden des anderen Symmetrietyps anregt. Dies zeigt sich mathematisch an der funktionalen Beziehung: $\Phi_n = \Phi_n(\sigma_h^2)$.

Es muß noch erwähnt werden, daß wir bei der Aufstellung des Gleichungssystems (3.52) über einen beliebigen Faktor $f^m_{k'}$ verfügen konnten, den wir so wählten, daß der erste Entwicklungskoeffizient ${}^1_a\Phi^m_{k',1}$ der Hough-Funktion des hochlaufenden Wellenmodes (m,k') gleich 1 ist (s.Gleichung (3.51)).
Wir können nun im Anschluß an die Lösung des Gleichungssystems (3.52) wegen der Linearität des aus den Gleichungen (3.39) und (3.49) bestehenden und zu (3.52) äquivalenten Systems bezüglich der Φ,Ψ die Entwicklungskoeffizienten aller Moden mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, den wir so festlegen, daß für die in Schicht 1 hochlaufende Welle (m,k') gilt:

$$\int_0^\pi \theta^m_{k',1}\,\theta^{*m}_{k',1}\,\sin\phi\,d\phi = 1 \qquad (4.13)$$

Aus den Koeffizienten der Φ,Ψ der so normierten Lösung lassen sich Druck, Wind, elektrisches Feld und elektrischer Strom

bestimmen. Schließlich kann man über den Gauß'schen Satz die Dichte j_B des die Magnetfeldlinien der Erde entlang fließenden Ausgleichstroms berechnen.

Betrachten wir nämlich innerhalb der Schicht 1 einen kleinen Zylinder, dessen Achse parallel zum Magnetfeld $\underline{B}_o$ ausgerichtet sei und der die Länge Δl und die Grundfläche Δf habe, so gilt wegen der Divergenzfreiheit des Gesamtstroms $\underline{j}_1 + \underline{j}_B$ zunächst:

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{j}_1 \, dv = -\iiint_V \operatorname{div} \underline{j}_B \, dv \,, \tag{4.14}$$

wo V das Volumen des Zylinders sei.

Da $\underline{j}_B$ parallel zur Mantelfläche fließt und $\underline{j}_1$ höhenunabhängig ist, gilt nach (4.14) annähernd:

$$\Delta l \cdot \iint_{\Delta f} \operatorname{div} \underline{j}_1 \, (dx,dy) = \iint_{\Delta f} \underline{j}_B \, df$$

Daraus folgt:

$$\Delta j_B = \lim_{\Delta f \to 0} \Delta l \cdot \iint_{\Delta f} \operatorname{div} \underline{j}_1 \, (dx,dy)/\Delta f = \Delta l \cdot \operatorname{div} \underline{j}_1 \tag{4.15}$$

Dabei ist Δj_B die Differenz der Stromdichte j_B zwischen der oberen und der unteren Zylinderfläche.

Somit gilt für die Zunahme der Stromdichte j_B pro Höhendifferenz

$$\Delta j_B / \Delta l = \operatorname{div} \underline{j}_1 \tag{4.16}$$

5. Energie der Wellenmoden

A. Potentielle Energie

Die Druckstruktur eines Wellenmodes enthält potentielle Energie, die im folgenden berechnet werden soll.

Dazu betrachten wir innerhalb der ungestörten Schicht ein kleines Volumen V_o mit dem Druck p_o. Eine Druckerhöhung (-erniedrigung) kann man sich erzeugt denken durch Kompression (Depression) des Volumens V_o auf ein Volumen V mit dem Druck p_o+p. Ist der Vorgang langsam gegenüber dem Temperaturausgleich mit der Umgebung, so kann man ihn als isotherm ansehen.

Sei p_o+p' der Druck im Volumen V', das während der Volumenänderung angenommen werde.

Die zugeführte Energie ist dann:

$$\varepsilon = \int_{V_o}^{V} p' \, dV' \, .$$

Da wir isotherme Kompression (Depression) annehmen, gilt:

$$V_o p_o = V(p_o+p) \tag{5.1}$$

und

$$V_o p_o = V'(p_o+p') \tag{5.2}$$

Daraus folgt:

$$p' = (p_o+p)\,\frac{V}{V'} - p_o$$

Also:

$$\varepsilon = \int_{V_o}^{V} ((p_o+p)\,\frac{V}{V'} - p_o)\,dV'$$

$$= (p_o+p)V \int_{V_o}^{V} \frac{dV'}{V'} - \int_{V_o}^{V} p_o\,dV'$$

$$= (p_o+p)V \ln \frac{V}{V_o} - p_o V + p_o V_o$$

und mit (5.1):

$$\varepsilon = -(p_o+p)V \ln(1+\frac{p}{p_o}) + pV$$

Für $\frac{p}{p_o} < 1$ kann $\ln(1+\frac{p}{p_o})$ um 1 entwickelt werden:

$$\ln(1+\frac{p}{p_o}) = \frac{p}{p_o} - \frac{1}{2}(\frac{p}{p_o})^2 + \text{höhere Potenzen}$$

Vernachlässigt man Potenzen von $\frac{p}{p_o}$ größer als 2, so erhält man:

$$\varepsilon = -(p_o+p)V\,(\frac{p}{p_o} - \frac{1}{2}(\frac{p}{p_o})^2) + pV = -\frac{1}{2}V\frac{p^2}{p_o}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Druckänderung einen Arbeitsaufwand erfordert, der der potentiellen Energie zugute kommt.

Somit ist die gesamte potentielle Energie innerhalb des Volumens einer Schicht der Dicke d und der Kugelfläche F:

$$\varepsilon_{pot} = \frac{1}{2}\iiint \frac{p^2}{p_o}\,dV = \frac{d}{2p_o}\iint p^2 dS \qquad (5.3)$$

Nach (2.22)gilt nun:

$$\frac{p}{p_o} = \frac{-ih}{\omega H} \sum \frac{n(n+1)}{r^2} \phi_n^m Y_n^m$$

h und ϕ_n^m sind komplexe Größen; mit $h = h^r + ih^i$, $\phi_n^m = \phi_n^{rm} + i\phi_n^{im}$

ergibt sich für den physikalisch relevanten Realteil von $\frac{p}{p_o}$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)_{reell} = \frac{1}{\omega H} \sum \frac{n(n+1)}{r^2} \left((h^r \phi_n^{im} + h^i \phi_n^{rm}) \cos m\tau \right.$$

$$\left. + (h^r \phi_n^{rm} - h^i \phi_n^{im}) \sin m\tau \right) \quad (5.4)$$

$$\tau = \varphi + \Omega t$$

Unter Beachtung von:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\tau \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\tau \, d\varphi = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\tau \sin m\tau \, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_n^m P_n^{m'} \sin\vartheta^* d\vartheta^* = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

folgt daraus:

$$\varepsilon_{pot} = \frac{dp_o}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{p_o}\right)^2_{re} r^2 \sin\vartheta^* d\varphi \, d\vartheta^*$$

$$= \frac{p_o d\pi}{\omega^2 r_o^2 H^2} \sum_{n,m} \frac{n^2(n+1)^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (h \phi_n^m)(h \phi_n^m)^* \quad (5.\ )$$

B. Kinetische Energie

Die gesamte kinetische Energie des Windes im Volumen der Schicht beträgt:

$$\varepsilon_{kin} = \frac{1}{2}\iiint(\rho_o + \rho_{re})\,\underline{U}_{re}^{\,2}\,dv$$
$$= \frac{\rho_o}{2}\iiint \underline{U}_{re}^{\,2}\,dv + \frac{1}{2}\iiint \rho_{re}\,\underline{U}_{re}^{\,2}\,dv \qquad (5.6)$$

wobei $\underline{U}_{re}$, ρ_{re} als Realteile von $\underline{U}$, ρ Windgeschwindigkeit bzw. Dichteschwankung und ρ_o die Dichte im ungestörten Zustand sind. Es gilt:

$$\underline{U}_{re} = -\nabla\Phi_{re} + \nabla\times\Psi_{re}\,\underline{r}_o \qquad (5.7)$$

$$\rho_{re} = \left(\rho_o \frac{p}{p_o}\right)_{re} \qquad (5.8)$$

Mit den Ansätzen:

$$\Phi = \sum(\Phi^m_{n\,re}\cos m\tau - \Phi^m_{n\,im}\sin m\tau)\,P^m_n$$
$$= -\sum(\Phi^m_{n\,re}\sin m\tau + \Phi^m_{n\,im}\cos m\tau)\,P^m_n \qquad (5.9)$$

erhält man aus (5.7) für den Realteil von $\underline{U}$ einen Ausdruck der Form:

$$\underline{U}_{re} = (A_1\sin m\tau + A_2\cos m\tau\ ,\ B_1\sin m\tau + B_2\cos m\tau)$$

Daraus folgt:

$$U_{re}^{\,2} = (A_1^{\,2} + B_1^{\,2})\sin^2 m\tau + (A_2^{\,2} + B_2^{\,2})\cos^2 m\tau$$
$$+ 2(A_1A_2 + B_1B_2)\sin m\tau\cos m\tau$$

Der Realteil von ρ hat nach (5.8) und (5.4) die Form:

$$\rho_{re} = C_1\sin m\tau + C_2\cos m\tau$$

Somit ergibt sich für $\rho_{re} \cdot U_{re}^2$ die Form:

$$\rho_{re} \cdot U_{re}^2 = D_1 \sin^3 m\tau + D_2 \sin^2 m\tau \cos m\tau + D_3 \sin m\tau \cos^2 m\tau + D_4 \cos^3 m\tau$$

Da nun:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 m\tau \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\tau \cos m\tau \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin m\tau \cos^2 m\tau \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^3 m\tau \, d\varphi = 0 \qquad , \tau = \varphi + \Omega t$$

folgt:

$$\iiint \rho_{re} U_{re}^2 \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{re} U_{re}^2 \, d\varphi \sin\vartheta \, d\vartheta = 0$$

Anschaulich ausgedrückt, mitteln sich die Beiträge der Dichtestörung ρ zur kinetischen Energie zu null.

Aus (5.7) folgt:

$$\iiint U^2 \, dv = \iiint (\nabla\Phi_{re})^2 \, dv + \iiint (\nabla\times\Psi_{re})^2 \, dv - \iiint (\nabla\Phi_{re} \, \nabla\times\Psi_{re} \, \underline{\hat{r}}) \, dv \qquad (5.10)$$

Wir berechnen nun nacheinander die drei Integrale auf der rechten Seite von (5.10).

1.

Die Anwendung der 1.Green'schen Formel ergibt:

$$\iiint (\nabla\Phi_{re})^2 = -\iint \Phi_{re}\,\Delta\Phi_{re} + \iint \Phi_{re}\frac{\partial \Phi_{re}}{\partial r}\,df$$

Wegen $\frac{\partial \Phi re}{\partial r} = 0$ verschwindet das letzte Oberflächenintegral.

2.

Allgemein gilt die Identität :

$$\nabla\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{b}\,\nabla\times\underline{a} - \underline{a}\,\nabla\times\underline{b}$$

Mit $\underline{a} = \Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}$

$$\underline{b} = \nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}$$

folgt:

$$(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})^2 = \nabla\cdot(\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})) + \Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\,\nabla\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})$$

$$= \nabla\cdot(\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})) - \Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\,\Delta\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}$$

Nach Benutzung des Gauß'schen Satzes erhält man:

$$\iiint (\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})^2\,dv = \iint (\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}))_r\,df$$

$$- \iiint \Psi_{re}\,\Delta\Psi_{re}\,dv$$

Da $(\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}}\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{f}})_r = 0$ (der Index bezeichnet die r-Komponente), ist das erste Integral auf der linken Seite gleich null.

3.

Zur Berechnung des dritten Integrals auf der rechten Seite von (5.10) benutzen wir die Identität:

$$\nabla\cdot(S\underline{V}) = S\,\nabla\underline{V} + (\nabla S)\cdot\underline{V},$$

wo S, $\underline{V}$ eine Skalar- bzw. Vektorfunktion darstellt.

Wir setzen:

$$S = \Phi_{re}$$

$$\underline{V} = \nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}}$$

Dann gilt:

$$\nabla\Phi_{re}\cdot\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}} = \nabla\cdot(\Phi_{re}\,\nabla\times\Psi_{re}\underline{\hat{r}}) - \Phi_{re}\,\nabla\cdot(\nabla\times(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}}))$$

Der letze Term ist null, so daß unter Verwendung des Gauß'schen Satzes gilt:

$$\iiint (\nabla\Phi_{re}\cdot\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}})\,dv = \iint \Phi_{re}\,(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}})_r\,df = 0$$

da $(\nabla\times\Psi_{re}\,\underline{\hat{r}})_r = 0$

Somit erhalten wir schließlich:

$$\varepsilon_{kin} = \frac{\rho_o}{2}\iiint U_{re}^{\,2}\,dv = -\frac{\rho_o}{2}\iiint (\Phi_{re}\,\Delta\Phi_{re} + \Psi_{re}\,\Delta\Psi_{re})\,dv \qquad (5.11)$$

Mit (5.9) ergibt sich daraus:

$$\varepsilon_{kin} = \rho_o\,d\pi\sum\frac{n(n+1)}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(\Phi_n^m\,\Phi_n^{m^*} + \Psi_n^m\,\Psi_n^{m^*}) \qquad (5.12)$$

C. Elektrische Energie

Die Energie des elektrischen Stroms tritt als Joule'sche Wärme auf, für die gilt:

$$\bar{Q} = \underline{j} \cdot \underline{E}_g \ ,$$

wo $\bar{Q}$ die Energie pro Volumen- und Zeiteinheit und

$\underline{E}_g = (\underline{E} + \underline{U} \times \underline{B}_o)$ das elektrische Gesamtfeld ist.

Mit $\underline{j} = \underline{\sigma} \cdot \underline{E}_g$ ergibt sich :

$$\bar{Q} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{E}_g)\underline{E}_g = \sigma_p E_g^2 \qquad (5.13)$$

Weiter ist :

$$j^2 = (\sigma_p^2 + \sigma_h^2) E_g^2 \qquad (5.14)$$

Aus (5.13) und (5.14) folgt:

$$\bar{Q} = \frac{j^2}{\sigma_c}$$

Dabei ist $\sigma_c = \sigma_p + \frac{\sigma_h^2}{\sigma_p}$ die Cowling-Leitfähigkeit.

Dann gilt für die während einer Zeitspanne ΔT dissipierte Energie:

$$\varepsilon_{joule} = \frac{\Delta T}{\sigma_c} \iiint j^2 \, dv$$

Mit $\underline{j} = -\nabla Q + \nabla \times R \, \underline{\hat{f}}$ erhalten wir ein Integral der gleichen Form wie in Abschnitt 2, so daß sich nach analoger Rechnung ergibt:

$$\varepsilon_{joule} = \frac{2d\Delta T\pi}{\sigma_c} \sum \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (Q_n^m Q_n^{m*} + R_n^m R_n^{m*}) \qquad (5.15)$$

D. Feldenergie

Für die elektrische - und magnetische Feldenergie ε_{el} bzw. ε_{mag} gilt:

$$\varepsilon_{el} = \frac{\varepsilon_o}{2} \iiint E^2 \, dv$$

$$\varepsilon_{mag} = \frac{1}{2\mu_o} \iiint B^2 \, dv \qquad (5.16)$$

Der Ansatz

$$\underline{E} = - \nabla S + \nabla \times T\underline{r}$$

führt nach Rechnung wie in Abschnitt 2 zu:

$$\varepsilon_{el} = B_o^2 \, d\varepsilon_o \, \pi \sum \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (S_n^{m*} S_n^m + T_n^m T_n^{m*}) \qquad (5.17)$$

Für das Magnetfeld gilt nach (3.15)

$$B^2 = - \frac{1}{\omega^2} (\Delta T)^2 \qquad (5.18)$$

Die potentielle mechanische Energie berechnete sich nach Abschnitt 1 zu:

$$\varepsilon_{pot} \sim \iiint p^2 \, dv \qquad \text{mit} \quad p^2 \sim (\Delta\phi)^2$$

Die formale Übereinstimmung dieser beiden Beziehungen mit (5.16) und (5.18) ergibt sofort das analoge Resutat:

$$\varepsilon_{mag} = \frac{dB_o^2 \, \pi}{\omega^2 r_o^2 \mu_o} \sum \frac{n^2(n+1)^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} T_n^{m*} T_n^m \qquad (5.19)$$

6. Ergebnisse und Diskussion

Die hydromagnetischen Gleichungen (3.1) bis (3.6) unter Einbeziehung der elektrischen Kopplung durch die Äquipotentiallinien des Erdmagnetfeldes ergeben zusammen mit den Bedingungen der mechanischen Kopplung von Wellen an der Grenzfläche verschiedener Schichten das Gleichungssystem (3.52), wobei vorausgesetzt wurde, daß nur ein einziger Wellenmode in der unteren Schicht hochläuft und an der Grenze zur nächsten Schicht eine endliche Anzahl von Moden erzeugt, die insgesamt die Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

Wir beschränkten uns auf zwei homogene aneinandergrenzende Schichten, deren Parameter Druck, Dichte und elektrische Leitfähigkeiten die der E- bzw. F- Schicht sind. In Wirklichkeit ändern sich diese Größen stetig und die Kopplung der Wellenmoden findet in jeder Höhe statt. Die Simulation dieses Sachverhalts durch Einteilung der Atmosphäre in dünne homogene Schichten, an deren jeweiligen Grenzen die Kopplung stattfindet, ist dann offenbar umso besser, je feiner diese Einteilung gewählt wird. Das heißt, daß die Beschränkung auf zwei Schichten nur eine erste grobe Näherung darstellt. Doch schon die Erweiterung auf drei Schichten vergrößert die Dimension des Gleichungssystems (3.52) in einem Maße, daß die Lösung innerhalb der verfügbaren Rechenzeit nicht mehr möglich ist. Wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt, berücksichtigten wir aus dem gleichen Grunde an

der Grenzfläche der beiden Schichten nur jeweils vier aufwärts bzw. abwärts laufende Wellen, d.h. l = 4 in Gleichung (3.43), was zu 40 Gleichungen mit 40 Unbekannten führt. Die äquivalenten Tiefen als charakterisierende Parameter dieser Wellenmoden sind dann nur Näherungen der exakten Werte, die sich theoretisch aus aus dem Grenzübergang l → ∞ ergeben.

Die in der E-Schicht hochlaufende Welle kann man sich erzeugt denken durch eine lokale Wärmequelle, die die thermische Anregung der Moden durch Absorption der EUV-Strahlung der Sonne in einem ausgedehnten Höhenbereich der Atmosphäre in stark vereinfachter Form simuliert. Diese Quelle wird das gesamte Spektrum der Wellenmoden anregen. Wegen des linearen Verhaltens der Thermosphäre gegenüber planetaren Wellen genügt es auf Grund des Superpositionsprinzips, jede der hochlaufenden Wellenmoden einzeln zu betrachten. Mathematisch bedeutet dies, daß die Berücksichtigung mehrerer hochlaufender Wellen zu einem Gleichungssystem führt, das in Untersysteme der Form (3.52) separiert werden kann.

Im Unterschied zum elektrisch ungekoppelten Fall werden äquivalente Tiefe und Struktur der an der Grenzfläche erzeugten Moden auch durch die mechanische Kopplung bestimmt und hängen daher von dem anregenden, hochlaufenden Wellenmode (m,k') ab, so daß das Gleichungssystem (3.52) jeweils für k'=1,2,3 und 4 gelöst wurde und in den nachfolgenden Tabellen und den Zeichnungen

im Anhang neben der zonalen und meridionalen Wellenzahl m, n' der anregende Mode (m,k') angegeben ist.

Um die Abweichung der durch die beschränkte Anzahl l=4 angenäherten Werte für die äquivalenten Tiefen vom jeweiligen Grenzwert abschätzen zu können, wurden die normierten äquivalenten Tiefen für l=2,3 und 4 für die verschiedenen primären Wellenmoden (m,k') berechnet und mit den entsprechenden äquivalenten Tiefen ohne elektrische Kopplung und deren Grenzwert verglichen. Dieser Vergleich im Konvergenzverhalten soll einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der berechneten äquivalenten Tiefen liefern.

In den Spalten der nachfolgenden Tabellen sind die Folgen der normierten äquivalenten Tiefen eines jeweiligen Wellenmodes für die verschiedenen in der E-Schicht hochlaufenden primären Moden aufgeführt. Die Moden werden hier zunächst vereinfachend mit den Zahlen 1,2,3 und 4 entsprechend ihrer Hierarchie bezeichnet.

In den letzten beiden Spalten findet man die Folge der äquivalenten Tiefen des entsprechenden Modes ohne elektrische Kopplung und deren Grenzwert (genauer gesagt, den Wert für l=15, der aber eine Genauigkeit $< 10^{-4}$ hat). Die obere Zahl ist der Realteil und die untere der Imaginärteil der komplexen Werte.

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	-.732	-.731			-.703	
	-.319	-.319			-.144	
3	-.928	-.922	-.923		-.855	
	-.410	-.407	-.408		-.148	
4	-.944	-.938	-.942	-.943	-.872	-.873
	-.409	-.413	-.424	-.424	-.152	-.154

Tab.1: Folge der äquivalenten Tiefen für:
m=1, δ=1, Mode 1

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	.610	.607			.961	
	-.202	-.200			-.156	
3	.425	.428	.430		.768	
	-.279	-.281	-.275		-.183	
4	.441	.465	.433	.436	.789	.788
	-.196	-.206	-.203	-.204	-.164	-.165

Tab.2: m=1, δ=1, Mode 2

	Primärer Wellenmode					
1	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	-1.22	-1.45			2.55	
	-3.31	-4.13			-1.83	
3	-.856	-1.21	-1.70		3.12	
	-3.47	-5.39	-5.00		-2.40	
4	.218	.733	3.69	3.16	3.11	3.09
	-4.01	-5.44	-.600	-.207	-2.44	-2.44

Tab.3: m=1, δ=10, Mode 1

	Primärer Wellenmode					
1	1	2	3	4	ohne elektr. Kopplung	Grenzwert
2	.205	.266			.293	
	-.976	-1.25			-1.36	
3	.316	.268	.252		.715	
	-1.41	-1.40	-1.46		-1.78	
4	.137	-.101	.376	.281	.758	.730
	-2.13	-1.37	-2.02	-1.94	-2.48	-2.52

Tab.4: m=1, δ=10, Mode 2

Ein Vergleich der ersten beiden Spalten von Tabelle 1 mit der fünften Spalte zeigt, daß die Konvergenz der Folgen der normierten äquivalenten Tiefen der gekoppelten Moden mindestens ebenso gut ist wie die der äquivalenten Tiefen der ungekoppelten Moden. Da sich der Grenzwert der letzteren nur wenig vom Glied der Folge für l=4 unterscheidet, können wir erwarten, daß auch die äquivalenten Tiefen des gekoppelten Wellenmodes 1 für die primären Moden 1 und 2 für l=4 nur in der Größenordnung weniger Prozent vom exakten Wert abweichen.
Ein entsprechender Vergleich für den Wellenmode 2 (Tabelle 2) zeigt, daß hier die Konvergenz der äquivalenten Tiefen der gekoppelten Moden weniger gut ist, so daß wir eine etwas größere Abweichung vom Grenzwert annehmen müssen. Ähnliches gilt für die beiden ersten Wellenmoden in der F-Schicht (Tabelle 3 und 4). Doch sieht man an Hand der Folge der äquivalenten Tiefen des nicht elektrisch gekoppelten Modes 2 (Spalte 5 der Tabelle 4), daß trotz des schwachen Konvergenzverhaltens der Wert für l=4 schon eine gute Näherung darstellen kann.
In den Tabellen 5 bis 8 findet man die Folgen der normierten äquivalenten Tiefen der ersten beiden halbtäglichen Wellenmoden (m=2) in der E- bzw. F-Schicht. Auch hier konvergiert die Folge des Modes 1 in der E-Schicht am besten. Andererseits sieht man an den Folgen der äquivalenten Tiefen für die ungekoppelten Wellenmoden 2 in der E- und F-Schicht, daß wie im Falle m=1

selbst bei schlechter Konvergenz der Wert der äquivalenten Tiefen für l=4 recht nahe am jeweiligen Grenzwert liegt. Da sich die Folgen für die gekoppelten Wellenmoden insgesamt ähnlich denen der ungekoppelten Moden verhalten, erwarten wir auch eine größenordnungsmäßig gleiche Abweichung vom genauen Wert.

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	.236	.222			.254	
	-.102	-.110			-.038	
3	.309	.303	.301		.314	
	-.041	-.042	-.043		-.023	
4	.297	.296	.288	.282	.306	.307
	-.050	-.054	-.051	-.053	-.025	-.022

Tab.5: Folge der äquivalenten Tiefen für:
m=2, δ=1, Mode 1

	Primärer Wellenmode					
1	1	2	3	4	ohne elektr. Kopplung	Grenzwert
2	.081	.081			.118	
	-.107	-.109			-.048	
3	-.019	-.015	.002		.038	
	-.152	-.077	-.125		-.058	
4	.119	.118	.119	.119	.128	.119
	-.042	-.043	-.043	-.043	-.027	-.018

Tab.6: m=2, δ=1, Mode 2

	Primärer Wellenmode					
1	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	.015	.916			1.45	
	-.753	-1.44			-1.73	
3	.554	.801	.797		1.73	
	-1.28	-2.15	-2.17		-2.72	
4	.571	.964	.853	.91	1.74	1.67
	-.259	-1.50	-1.94	-1.98	-2.77	-2.82

Tab.7: m=2, δ=10, Mode 1

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
2	.339	.491			.726	
	-1.10	-.962			-1.35	
3	.425	.321	.161		.97	
	-1.24	-1.18	-1.13		-1.57	
4	.447	.097	.378	.39	.83	.77
	-1.82	-.207	-1.97	-2.01	-2.31	-2.36

Tab.8: m=2, δ=10, Mode 2

In den nachfolgenden Tabellen sind die normierten äquivalenten Tiefen der Wellenmoden 3 und 4 aufgeführt. Der Vergleich der äquivalenten Tiefen der ungekoppelten Moden für l=4 mit den entsprechenden exakten Werten zeigt, daß die Beschränkung auf vier Wellenmoden zu sehr ungenauen Werten für die äquivalenten Tiefen der Moden 3 und 4 führt. Aus diesem Grunde werden die weiteren Ergebnisse (vertikale Wellenstruktur, Energie, horizontale Struktur von Druck, Wind etc.) nur für die jeweils ersten beiden Moden dargestellt.

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
3	.040	.041	.039		-.028	
	-.051	-.051	-.049		-.041	
4	-.030	-.029	-.037	-.036	-.046	-.134
	-.060	-.059	-.059	-.060	-.049	-.092

Tab.9: Folge der Äquivalenten Tiefen für:
m=1, δ=1, Mode 3

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
4	-.062	-.062	-.062	-.062	-.080	-.153
	-.144	-.144	-.144	-.144	-.085	-.104

Tab.10: m=1, δ=1, Mode 4

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
3	.186	.130	-.483		.070	
	-1.29	-1.32	-.162		-.59	
4	.535	.086	-.152	.185	.093	.080
	-1.29	-1.23	-.263	-.978	-.72	-1.27

Tab.11: m=1, δ=10, Mode 3

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
4	.101	.097	.120	.066	.132	.036
	-.502	-.376	-.358	-.446	-.348	-.790

Tab.12: m=1, δ=10, Mode 4

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
3	-.025	-.022	-.023		-.0006	
	-.164	-.165	-.165		-.074	
4	-.071	-.068	-.067	-.068	-.042	-.087
	-.180	-.183	-.169	-.179	-.079	-.109

Tab.13: m=2, δ=1, Mode 3

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
4	-.060	-.058	-.061	-.060	-.055	-.086
	-.174	-.174	-.171	-.173	-.093	-.109

Tab.14: m=2, δ=1, Mode 4

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
3	.462	.080	-.062		.308	
	-.734	-.754	-.824		-.554	
4	.400	.557	.017	.48	.348	.260
	-.777	-.805	-1.31	-1.02	-.619	-1.36

Tab.15: m=2, δ=10, Mode 3

	Primärer Wellenmode					
l	1	2	3	4	ohne elekt. Kopplung	Grenzwert
4	.299	.306	.118	.210	.366	.21
	-.478	-.465	.126	-.204	-.488	-1.02

Tab.16: m=2, δ=10, Mode 4

Nach Abb.2 (Kapitel 2) können wir die elektrisch ungekoppelten Wellenmoden identifizieren als:

m=1	E-Schicht ($\delta \sim 1$)	F-Schicht ($\delta \sim 10$)
	Mode 1 = Mode (1,-2)	Mode 1 = Mode (1,-2)
	Mode 2 = Mode (1,-1)	Mode 2 = Mode (1,-3)
m=2		
	Mode 1 = Mode (2,2)	Mode 1 = Mode (2,-3)
	Mode 2 = Mode (2,3)	Mode 2 = Mode (2,-2)

Für die gekoppelten Wellenmoden wählen wir die gleiche Bezeichnung. Dies wird nahegelegt durch die ähnliche Struktur der entsprechenden gekoppelten und ungekoppelten Moden insbesondere in der E-Schicht (s.Anhang).

Die vertikale Struktur der aufsteigenden Wellen hat die Form (Gleichung (2.29)):

$$\exp\{(1-\beta) + i\alpha\}z/2H \qquad (6.1)$$

mit $\beta - i\alpha = \left(1 - \frac{4(\gamma-1)H}{\gamma-h}\right)^{1/2}$ und h der äquivalenten Tiefe.

Die absteigende Welle hat die vertikale Struktur:

$$\exp\{(-1-\beta) + i\alpha\}z/2H, \qquad (6.2)$$

wenn z positiv in Richtung der Fortpflanzung, also in diesem Fall nach unten, gerechnet wird.

Für die vertikale Wellenlänge λz und die Skalenhöhe der Dämpfung Hz gilt:

$$\lambda z = 4\pi H/\alpha \qquad (6.3)$$

$$Hz = 2H/(\beta-1) \quad \text{für die aufsteigende Welle} \qquad (6.4)$$

$Hz = 2H/(\beta+1)$ für die absteigende Welle (6.5)

Die Wellenlänge ist umso größer, je kleinere Werte α annimmt. Die Dämpfung der Welle wird durch β bestimmt. Für $\beta = 0$ pflanzt sich die Welle ungedämpft fort und die relative Amplitude der aufsteigenden Welle wächst adiabatisch proportional zu $\exp(z/2H)$, während $\beta > 0$ eine Dämpfung der Welle bedeutet. Die adiabatische Vergrößerung der Amplitude mit zunehmender Höhe führt dazu, daß sie trotz Dämpfung anwächst, solange $\beta < 1$, d.h. $Hz < 0$, gilt. Erst für $\beta > 1$ ($Hz > 0$) überwiegt die Dämpfung und die relative Amplitude der aufsteigenden Welle wird effektiv kleiner. Für die absteigende Welle gilt wegen $\beta \geq 0$ stets $Hz > 0$.

In den Tabellen (17) bis (20) sind die Parameter α und β, die vertikale Wellenlänge λz, die Skalenhöhe der Dämpfung Hz sowie die normierte äquivalente Tiefe für die verschiedenen Wellenmoden angegeben. Die Tabellen (17) und (18) zeigen die genannten Größen für die elektrisch ungekoppelten Moden. Die Skalenhöhe Hz ist in der E-Schicht ($\delta \sim 1$) jeweils für die auf- und absteigende Welle nach (6.4) bzw. (6.5) berechnet worden. In der F-Schicht ($\delta \sim 10$) ist Hz nur für die aufsteigenden Wellen angegeben, da es nach dem zugrundeliegenden "Zwei-Schichten-Modell" in der oberen Schicht nur eine hochlaufende Welle gibt.

In den Tabellen (19) und (20) sind die entsprechenden Werte für die ersten beiden elektrisch gekoppelten Wellenmoden in Abhängigkeit von dem jeweiligen primären Mode angegeben. In Spalte 1

ist der betreffende Wellenmode aufgeführt und in Spalte 2 der in der E-Schicht hochlaufende Mode, der an der Grenzfläche die in der F-Schicht hochlaufenden und in der E-Schicht absteigenden Wellen erzeugt. In der E-Schicht ($\delta \sim 1$, Tab.(19)) ist die Dämpfungs-Skalenhöhe der aufsteigenden Welle nur für diesen erzeugenden Mode berechnet worden.

Vergleichen wir die vertikale Wellenlänge und die Dämpfung der ungekoppelten und gekoppelten (1,-2)-Welle in der E-Schicht miteinander, so sehen wir, daß die Wellenlänge der letzteren (1360km bzw. 1340km) um mehr als die Hälfte kleiner ist als die der ungekoppelten Welle (2820 km). Die Dämpfung des elektrisch gekoppelten Modes ist etwas schwächer ($\beta = 1.27$ gegen $\beta = 1.32$). Außerdem sieht man, daß der Einfluß des erzeugenden Modes auf die vertikale Wellenlänge und die Dämpfung sehr gering ist. Auch die Wellenlänge des (1,-1)-Modes wird durch die elektrische Kopplung erheblich verkleinert (auf weniger als ein Drittel) und die Dämpfung ist ebenfalls etwas geringer. Beide Größen unterscheiden sich für die verschiedenen primären Wellen nur gering.

Das gleiche gilt für die beiden halbtäglichen Wellen (2,2) und (2,3) in der E-Schicht, nur daß hier die Wellenlängen der gekoppelten und ungekoppelten Moden sehr ähnlich sind.

Betrachten wir die ganztäglichen Wellenmoden in der F-Schicht, so fällt auf, daß zwar die Wellenlängen der primären Moden nicht sehr verschieden sind von den Wellenlängen der entsprechenden

ungekoppelten Moden, daß ansonsten aber die Unterschiede zwischen den gekoppelten und ungekoppelten Wellen in der F-Schicht im allgemeinen größer sind als in der E-Schicht. Insbesondere ist die Dämpfung der gekoppelten Wellen hier größer als die der ungekoppelten und die Vertikalstruktur der ersteren hängt in höherem Maße von dem primären Mode ab. Diese Abhängigkeit von dem in der E-Schicht hochlaufenden Mode gilt ebenso für die halbtäglichen Wellen in der F-Schicht, deren vertikale Wellenlänge zudem viel kleiner ist als die der entsprechenden ungekoppelten Wellenmoden.

	Wellenmode	α	β	λ_z (km)	$H_z\uparrow$ (km)	$H_z\downarrow$ (km)	h/h_c
m=1	(1,-2)	.049	1.32	2820	68.6	9.48	(-.872,-.152)
	(1,-1)	.179	.471	774	-41.6	14.9	(.789,-.164)
m=2	(2,2)	1.08	.082	128	-24	20.3	(.306,-.164)
	(2,3)	2.01	.261	68.6	-29.8	17.4	(.128,-.027)

Tab.17: Die Parameter α, β vertikale Wellenlänge, Skalenhöhe der Dämpfung und normierte äquivalente Tiefe für die beiden ersten ganztäglichen bzw. halbtäglichen Wellenmoden ohne elektrische Kopplung in der E-Schicht (δ≈1).

	Wellenmode	α	β	λ_z (km)	$H_z\uparrow$ (km)	$H_z\downarrow$ (km)	h/h_c
m=1	(1,-2)	.332	.712	1890	- 347	-	(3.11,-2.44)
	(1,-3)	.565	.989	1110	-8940	-	(.758,-2.48)
m=2	(2,-3)	.462	.849	1360	- 662	-	(1.74,-2.77)
	(2,-2)	.599	.970	1050	-3350	-	(.83,-2.31)

Tab.18: Wie 17 für die F-Schicht (δ≈10)

	Wellenmode	primäre Welle	α	β	λ_z (km)	H_z+(km)	H_z+(km)	h/h_o
m=1	(1,-2)	(1,-2)	.102	1.27	1360	82.4	9.69	(-.944,-.409)
		(1,-1)	.103	1.27	1340	-	9.7	(-.938,-.413)
	(1,-1)	(1,-2)	.664	.422	280	-	15.5	(.441,-.196)
		(1,-1)	.619	.429	223	-38.5	15.4	(.465,-.206)
m=2	(2,2)	(2,2)	1.10	.167	126	-26.4	18.9	(.297,-.050)
		(2,3)	1.10	.181	126	-	18.6	(.297,-.054)
	(2,3)	(2,2)	2.04	.431	67.7	-	15.4	(.119,-.042)
		(2,3)	2.05	.444	67.6	-39.6	15.2	(.118,-.043)

Tab. 19: Wie 17 für die elektrisch gekoppelten Moden unter Berücksichtigung der primären Welle

	Wellenmode	primäre Welle	α	β	λ_z (km)	$H_z\uparrow$ (km)	$H_z\downarrow$ (km)	h/h_o
m=1	(1,-2)	(1,-2)	.361	1.04	1740	2290	-	(.218,-4.01)
		(1,-1)	.273	∿1.00	2300	193000	-	(.733,-5.44)
	(1,-3)	(1,-2)	.622	1.14	1010	722	-	(.137,-2.13)
		(1,-1)	.814	1.35	722	285	-	(-.101,-1.37)
m=2	(2,-3)	(2,2)	1.92	.521	328	-209	-	(.571,-.259)
		(2,3)	.822	.870	765	-768	-	(.964,-1.50)
	(2,-2)	(2,2)	.732	1.07	858	1380	-	(.447,-1.82)
		(2,3)	2.96	2.03	212	97.1	-	(.097,-.207)

Tab.20: Wie 19 für die F-Schicht.

Die Tabellen (21) bis (24) zeigen die Energiedichte nach den Gleichungen (5.5),(5.12),(5.15) und (5.19). Die durch den elektrischen Strom dissipierte Energie in Form Joule'scher Wärme ist in der Einheit Watt angegeben.

Die Energie der elektrisch ungekoppelten Wellen ist in den Tabellen (21,22)aufgeführt. Für diese Wellen folgt aus den Bedingungen der mechanischen Kopplung, daß die an der Grenzfläche erzeugten Moden die gleiche Symmetrie haben wie die primäre Welle und die Moden der anderen Symmetrieform daher nicht angeregt werden. So ist zum Beispiel die Amplitude der antisymmetrischen (1,-1)-Welle gleich null, wenn die hochlaufende Welle die symmetrische (1,-2)-Welle ist. Da wir uns auf die ersten beiden (symmetrischen bzw. antisymmetrischen) Moden beschränken, ist der in den Tabellen(21,22) angegebene Mode stets der primäre.

Man sieht, daß für die Wellen in der E-Schicht die kinetische Energie den größten Beitrag liefert, während in der F-Schicht die potentielle Energie überwiegt. Die Energie des vom elektrischen Strom erzeugten Magnetfeldes ist geringer, jedoch nicht zu vernachlässigen. Dagegen ist die elektrische Feldenergie um fünf bis sechs Zehnerpotenzen kleiner und daher in den Tabellen nicht angegeben. Die Energie der Wellen in der F-Schicht ist erheblich geringer als die der Wellenmoden in der E-Schicht, so daß der weitaus größere Teil der Wellenenergie in der unteren Schicht verbleibt.

Für die Energieverteilung der elektrisch gekoppelten Moden gelten im wesentlichen die gleichen Verhältnisse (Tabellen 23,24). Auch hier entfällt der größte Anteil in der E-Schicht auf die kinetische Energie, die potentielle Energie überwiegt in der F-Schicht allerdings nur für die ganztäglichen Wellen. Die Energie des elektrischen Feldes ist ebenfalls zu vernachlässigen im Gegensatz zur magnetischen Energie, die in der E- und F-Schicht für die entsprechenden Moden gleich groß ist. Das letztere ist eine Folge der Näherung rot $\underline{B} = \mu_o(\underline{j}_1 + \underline{j}_2)/2$ (Gleichung 3.2). Die Energie der "reflektierten" Wellen ist auch hier viel größer als die der aufsteigenden Wellen in der F-Schicht, doch ist der Anteil der letzteren höher als im ungekoppelten Fall, so daß die elektrische Kopplung die "Durchlässigkeit" der Schichtgrenze etwas erhöht.

Wellenmode	E_{pot} (J/m^3)	E_{kin} (J/m^3)	E_{Joule} (W/m^3)	E_{mag} (J/m^3)
(1,-2)	$5 \cdot 10^{-4}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$	$9.04 \cdot 10^{-9}$	$1.40 \cdot 10^{-4}$
(1,-1)	$5 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-8}$	$3.82 \cdot 10^{-4}$
(2,2)	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$2.39 \cdot 10^{-8}$	$1.58 \cdot 10^{-4}$
(2,3)	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$7.19 \cdot 10^{-3}$	$5.76 \cdot 10^{-8}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$

Tab. 21: Energie der ersten beiden ganz- und halbtäglichen ungekoppelten Wellenmoden in der E-Schicht

Wellenmode	E_{pot} (J/m^3)	E_{kin} (J/m^3)	E_{Joule} (W/m^3)	E_{mag} (J/m^3)
(1,-2)	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$1.63 \cdot 10^{-6}$	$1.82 \cdot 10^{-10}$	$2.40 \cdot 10^{-8}$
(1,-3)	$2.05 \cdot 10^{-6}$	$8.87 \cdot 10^{-7}$	$2.79 \cdot 10^{-10}$	$2.67 \cdot 10^{-8}$
(2,-3)	$1.15 \cdot 10^{-6}$	$5.86 \cdot 10^{-7}$	$2.32 \cdot 10^{-10}$	$2.05 \cdot 10^{-8}$
(2,-2)	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$4.61 \cdot 10^{-7}$	$2.86 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$

Tab.22: Wie 21 für die Wellen in der F-Schicht

Wellenmode	primärer Mode	E_{pot} (J/m^3)	E_{kin} (J/m^3)	E_{Joule} (W/m^3)	E_{mag} (J/m^3)
(1,-2)	(1,-2)	$5 \cdot 10^{-4}$	$5.27 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-8}$	$6.95 \cdot 10^{-5}$
	(1,-1)	$8.31 \cdot 10^{-4}$	$8.81 \cdot 10^{-4}$	$2.86 \cdot 10^{-8}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
(1,-1)	(1,-2)	$9.66 \cdot 10^{-5}$	$6.27 \cdot 10^{-4}$	$6.93 \cdot 10^{-9}$	$5.01 \cdot 10^{-5}$
	(1,-1)	$5 \cdot 10^{-4}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-4}$
(2,2)	(2,2)	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-8}$	$7.61 \cdot 10^{-5}$
	(2,3)	$2.39 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-10}$	$3.69 \cdot 10^{-4}$
(2,3)	(2,2)	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$2.75 \cdot 10^{-10}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$
	(2,3)	$4.41 \cdot 10^{-4}$	$5.78\ 10^{-3}$	$8.63 \cdot 10^{-8}$	$3.45 \cdot 10^{-4}$

Tab.23: Wie 21 für die elektrisch gekoppelten Wellen

Wellenmode	primärer Mode	E_{pot} (J/m^3)	E_{kin} (J/m^3)	E_{Joule} (W/m^3)	E_{mag} (J/m^3)
(1,-2)	(1,-2)	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$4.24 \cdot 10^{-6}$	$3.05 \cdot 10^{-9}$	$6.95 \cdot 10^{-5}$
	(1,-1)	$2.22 \cdot 10^{-5}$	$6.12 \cdot 10^{-6}$	$3.49 \cdot 10^{-9}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
(1,-3)	(1,-2)	$1.44 \cdot 10^{-5}$	$3.48 \cdot 10^{-6}$	$3.22 \cdot 10^{-9}$	$5.01 \cdot 10^{-5}$
	(1,-1)	$5.33 \cdot 10^{-5}$	$1.12 \cdot 10^{-5}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$	$2.32 \cdot 10^{-4}$
(2,-3)	(2,2)	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-5}$	$6.99 \cdot 10^{-9}$	$7.61 \cdot 10^{-5}$
	(2,3)	$2.35 \cdot 10^{-7}$	$1.75 \cdot 10^{-7}$	$1.14 \cdot 10^{-10}$	$3.69 \cdot 10^{-4}$
(2,-2)	(2,2)	$4.5 \cdot 10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$2.05 \cdot 10^{-10}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$
	(2,3)	$4.39 \cdot 10^{-7}$	$6.78 \cdot 10^{-5}$	$8.65 \cdot 10^{-9}$	$3.45 \cdot 10^{-4}$

Tab.24: Wie 23 für die Wellen in der F-Schicht

Im Anhang ist die horizontale Struktur von Druck, Wind, elektrischer Stromdichte und elektrischem Feld der ersten beiden ganztäglichen und halbtäglichen Wellenmoden in der E- und F-Schicht dargestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Parameter der gekoppelten und ungekoppelten Wellen gegenübergestellt.

Abbildung 1 zeigt die Isobaren des ungekoppelten symmetrischen (1,-2)-Modes in der E-Schicht, die Abbildungen 2 und 3 zeigen die Isobaren der gekoppelten (1,-2) Moden für die primären Wellenmoden (1,-2) bzw. (1,-1). Der Unterschied in der Struktur zwischen dem ungekoppelten Mode und dem elektrisch gekoppelten Mode ist sehr gering, ebenso der Einfluß des primären Modes auf die Druckstruktur der gekoppelten Moden. Deutlicher ist die Veränderung der Druckstruktur durch die Einbeziehung der elektrischen Kopplung beim antisymmetrischen (1,-1)-Mode (Abbildungen 4,5,6) sowie bei den Wellenmoden (1,-2) und (1,-3) in der F-Schicht (Abbildungen 7 bis 12).

In den Abbildungen 13 bis 18 sind die Windfelder des (1,-2)- und (1,-1) Modes in der E-Schicht dargestellt. Auch hier ist die Ähnlichkeit der Felder des ungekoppelten und des elektrisch gekoppelten (1,-2)-Modes sehr groß, während es sichtbare, wenn auch keine großen Unterschiede in der Struktur der Windfelder für den (1,-1)-Mode gibt, insbesondere kann man eine Phasenverschiebung des "gekoppelten" Feldes gegenüber dem "ungekoppelten"

beobachten.

In der F-Schicht ist der Einfluß der elektrischen Kopplung auf die Windstruktur größer (Abbildungen 19 bis 24), besonders auf die Felder des (1,-3)-Modes.

Die Felder der elektrischen Stromdichte zeigen die Abbildungen 25 bis 36. In der E-Schicht sind die Stromdichtefelder des gekoppelten und ungekoppelten (1,-2)-Modes wiederum sehr ähnlich, die Felder des (1,-1)-Modes sind bei geringen Unterschieden in der Struktur gegeneinander phasenverschoben. Auch in der F-Schicht erzeugt die elektrische Kopplung neben der Phasenverschiebung keine großen Veränderungen in der Struktur der Stromdichte.

Die elektrischen Felder der ungekoppelten und gekoppelten Moden sind in den Abbildungen 37 bis 44 zu finden. Für die letzteren genügt es, die elektrischen Felder der Wellenmoden in der E-Schicht darzustellen, da diese voraussetzungsgemäß den Feldern der entsprechenden Moden in der F-Schicht gleich sind. Die elektrischen Felder des ungekoppelten (1,-2)-Modes in der E- und F-Schicht besitzen eine ähnliche Struktur im Gegensatz zu den Feldern der antisymmetrischen Moden (1,-1) bzw. (1,-3). Daher hat die elektrische Kopplung, die von der Identität dieser Felder auf Grund der hohen Parallelleitfähigkeit ausgeht, eine geringere Veränderung der elektrischen Feldstruktur des (1,-2)-Modes als der des (1,-1)-Modes zur Folge.

Die Linien gleicher Stromdichte für den Ausgleichsstrom j_B entlang des Erdmagnetfeldes zeigen die Abbildungen 45 bis 48. Positives Vorzeichen bedeutet, daß j_B nach oben fließt. Von den beiden miteinander gekoppelten Moden der E- undF-Schicht ist nur jeweils der Wellenmode in der E-Schicht angegeben. Gemäß der Gleichung (4.16) ist der Betrag der Stromdichte j_B höhenabhängig, der Zuwachs Δj_B ist annähernd proportional der Höhendifferenz. Die Größenangaben in den Abbildungen der Stromdichte j_B beziehen sich auf eine Höhendifferenz von 10 km.

Die Druckstruktur der halbtäglichen Wellen in der E-Schicht wird durch die elektrische Kopplung nur sehr wenig beeinflußt (Abbildungen 49 bis 54), wohingegen der Verlauf der Isobaren der entsprechenden Moden in der F-Schicht stark verändert wird und von dem primären, in der E-Schicht aufsteigenden Wellenmode abhängt (Abbildungen 55 bis 60). Auch die Windfelder der ungekoppelten (2,2)- und (2,3)-Welle in der E-Schicht sind denen der elektrisch gekoppelten Wellen bis auf eine Phasenverschiebung sehr ähnlich, während die Windstruktur der entsprechenden Moden in der F-Schicht ((2,-3)- bzw. (2,-2)-Mode) deutlich modifiziert wird(Abbildungen 61 bis 72). Die gleiche Tendenz gilt für die Felder der elektrischen Stromdichte. Der Einfluß der elektrischen Kopplung auf die Struktur des Stroms der Wellenmoden in der E-Schicht ist geringer als auf die Stromverteilung der Moden in der

F-Schicht (abbildungen 73 bis 84).
Abbildungen 85 und 86 zeigen die unterschiedliche Struktur und Größe der elektrischen Felder des ungekoppelten (2,2)- und (2,-3) -Modes. Im Falle der Kopplung besitzen diese Moden das gleiche elektrische Feld (Abbildung 87) und man sieht, daß die Struktur dieses Feldes sehr ähnlich ist dem des ungekoppelten (2,2)-Modes in der E-Schicht. Dagegen ist das elektrische Feld der miteinander gekoppelten (2,3)- und (2,-2)-Moden (Abbildung 92) recht verschieden von dem des ungekoppelten (2,3)-Modes (Abbildung 89), wenn sich auch ähnliche Teilstrukturen erkennen lassen.
In den Abbildungen 93 bis 96 sind die Stromdichteverteilungen des Ausgleichstroms j_B zwischen den gekoppelten Moden (2,2) und (2,-3) bzw. (2,3) und (2,-2) für die primären Moden (2,2) und (2,3) wiedergegeben. Auch hier ist der Betrag der Stromdichte auf eine Höhendifferenz von 10 km normiert.
Die Abbildungen 97 bis 108 stellen einige ausgewählte rotations- bzw. divergenzfreie elektrische Teilfelder für den ungekoppelten und den gekoppelten Fall dar.

Insgesamt läßt sich für die Modifikation der horizontalen Struktur der Wellenparameter durch die elektrische Kopplung die Tendenz feststellen, daß die Wellenmoden in der F-Schicht stärker beeinflußt werden als die Moden in der E-Schicht.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß die nach dem vorliegenden Modell berechneten und im Anhang wiedergegebenen Strukturen die tatsächlichen Verhältnisse in der Nähe des Äquators nur sehr unvollkommen beschreiben. Wegen der starken Neigung der geomagnetischen Feldlinien sind die Abbildungsbedingungen für die elektrischen Felder der E- und F-Schicht in Äquatornähe komplizierter als im Modell vorausgesetzt und in höheren Breiten mit guter Näherung erfüllt. Auch kann der elektrische Strom entlang der Magnetfeldlinien oberhalb der F-Schicht dort nicht mehr vernachlässigt werden (s.Kapitel 3). Außerdem werden die Leitfähigkeiten dem Betrag nach als konstant angenommen, was insbesondere für die Hall-Leitfähigkeit in niederen Breiten unzutreffend ist. Die Vorzeichenänderung der Hall-Leitfähigkeit von der Nord- zur Südhalbkugel führt zu einem physikalisch unrealistischen Unstetigkeitssprung. Die in der Nähe des Äquators sehr dicht verlaufenden Isolinien in den Abbildungen 12, 48, 60, 95 und 96 sind eine Folge dieser sprunghaften Änderung der Hall-Leitfähigkeit und insofern ohne physikalische Bedeutung.

Da die vorliegenden Ergebnisse insgesamt auf sehr vereinfachten Modellannahmen beruhen, sind sie als ein erster Schritt in der theoretischen Berechnung gekoppelter hydromagnetischer Dynamofelder verschiedener Höhenbereiche zu werten.

Immerhin kann man erwarten, daß sie die auf Grund der elektrischen Kopplung modifizierten vertikalen und horizontalen Wellenstrukturen in einer zumindest qualitativ richtigen Weise beschreiben.

Anhang

Horizontale Struktur von relativem Druck, Wind, elektrischer Stromdichte, elektrischem Feld und Dichteverteilung des elektrischen Stroms j_B der ersten beiden ganz- und halbtäglichen Wellenmoden in der E-Schicht und in der F-Schicht ohne und mit Berücksichtigung der elektrischen Kopplung.

Darstellung einiger rotations- und divergenzfreier elektrischer Teilfelder.

Bemerkung: Das Symbol "+" bezeichnet den aufsteigenden primären Mode.

Druck (E-Schicht)
ungekoppelt

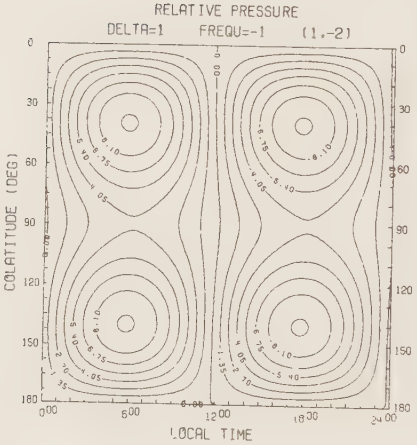


Abb.1: $\cdot 10^{-1}$

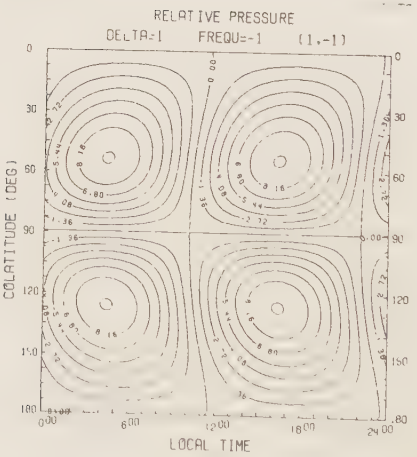


Abb.4: $\cdot 10^{-1}$

Druck (E-Schicht)
gekoppelt

(1,-2)↑

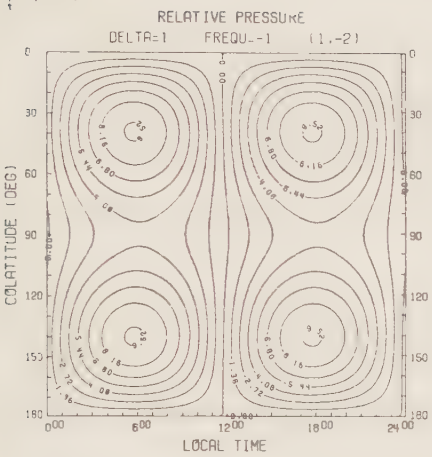


Abb.2: $\cdot 10^{-1}$

(1,-1)↑

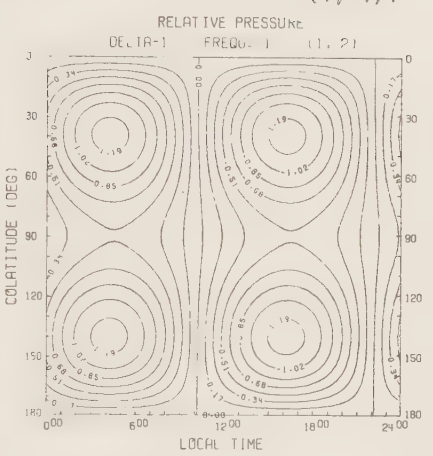


Abb.3: $\cdot 1$

(1,-2)↑

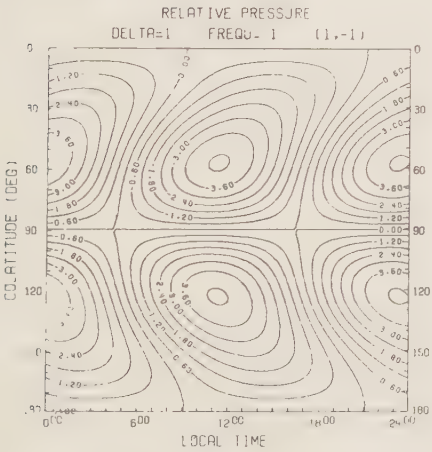


Abb.5: $\cdot 10^{-1}$

(1,-1)↑

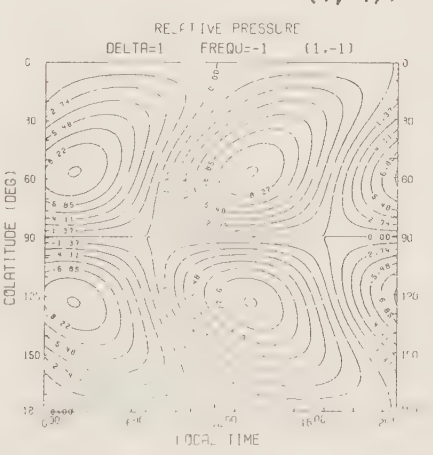


Abb.6: $\cdot 10^{-1}$

Druck (F-Schicht)
ungekoppelt

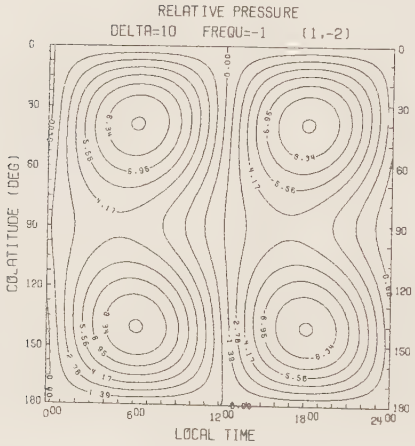


Abb.7: $\cdot 10^{-1}$

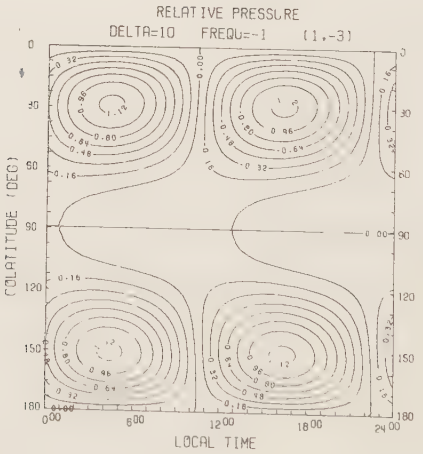


Abb.10: $\cdot 1$

Druck (F-Schicht) gekoppelt

(1,-2) t

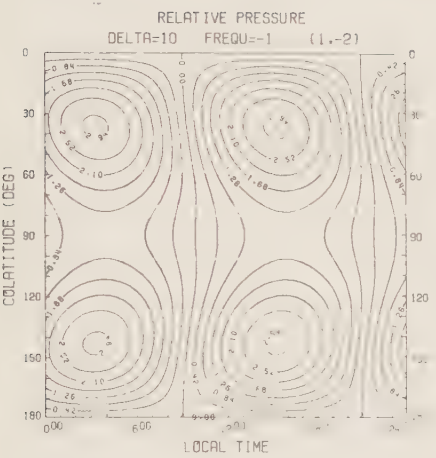


Abb.8: •1

(1,-1) t

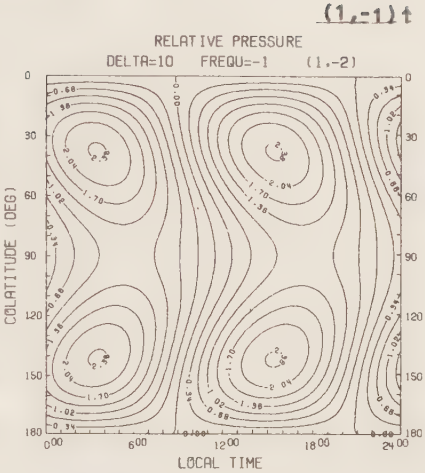


Abb.9: •1

(1,-2) t

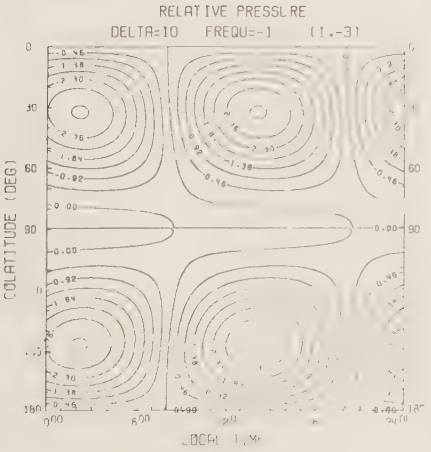


Abb.11: •1

(1,-1) t

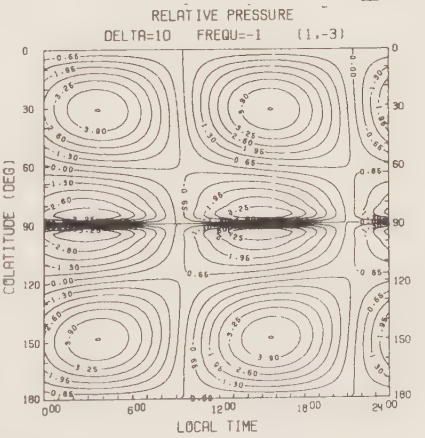


Abb.12: •1

Wind (E-Schicht)
ungekoppelt

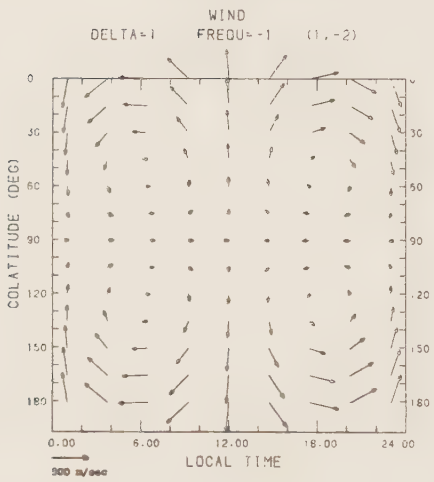


Abb.13

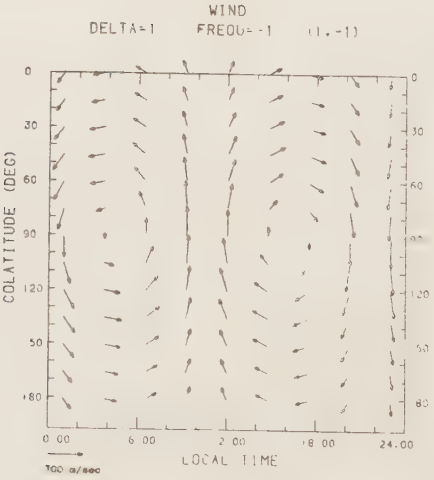


Abb.16

Wind (E-Schicht)
gekoppelt

(1,-2)↑

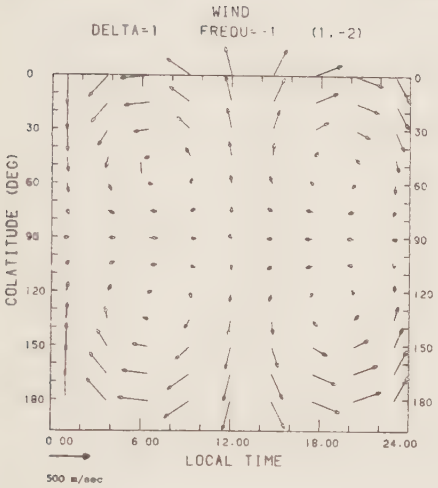


Abb.14

(1,-1)↑

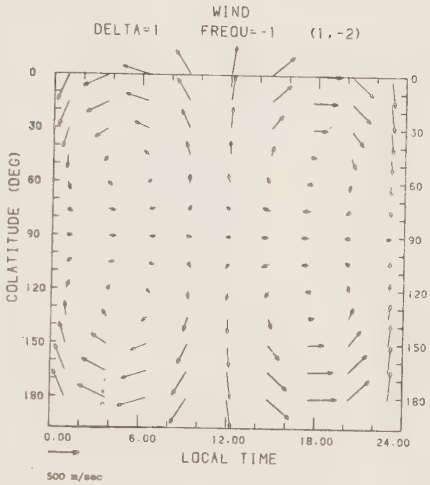


Abb.15

(1,-2)↑

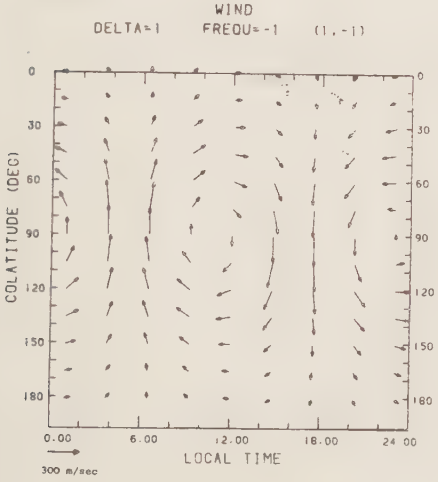


Abb.17

(1,-1)↑

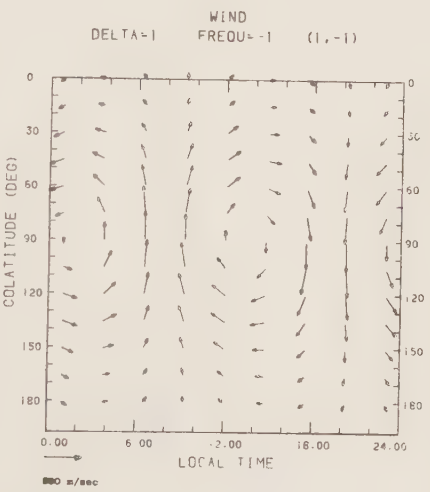


Abb.18

Wind (F-Schicht)
ungekoppelt

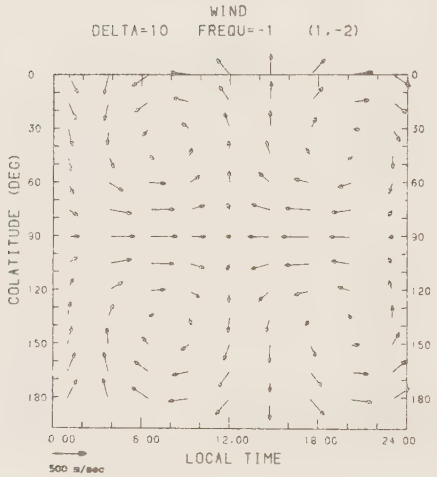


Abb.19

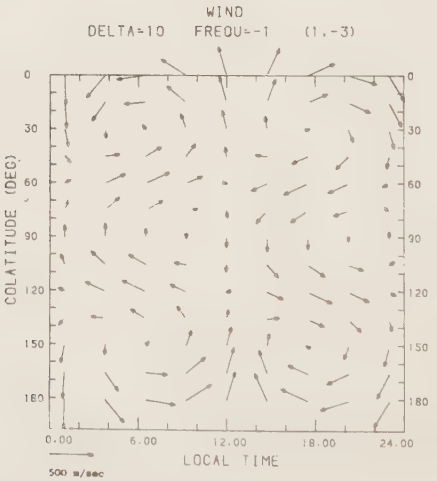


Abb.22

Wind (F-Schicht)
gekoppelt

(1,-2) ↑

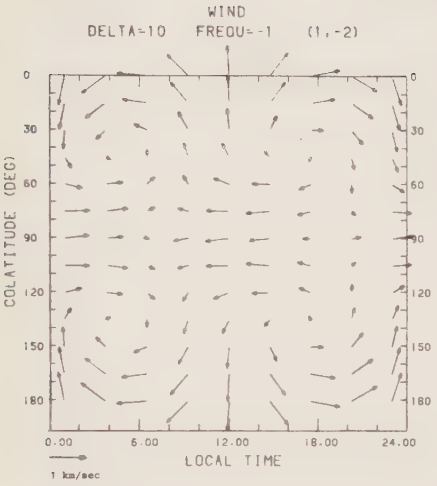


Abb.20

(1,-1) ↑

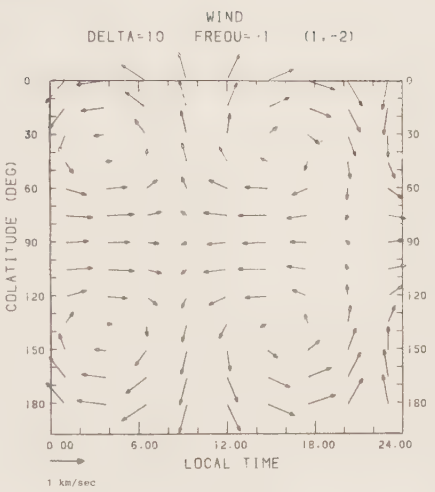


Abb.21

(1,-2) ↑

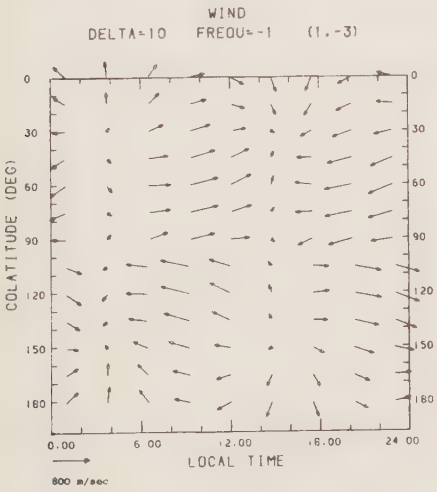


Abb.23

(1,-1) ↑

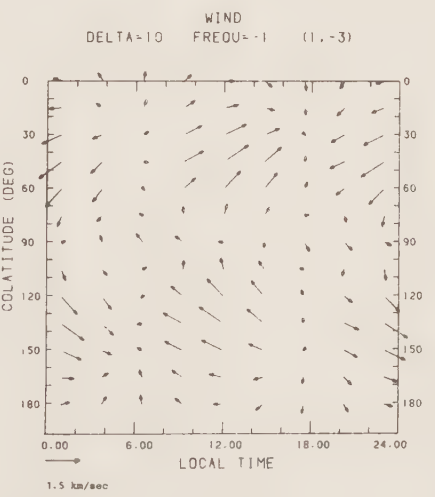


Abb.24

Strom (E-Schicht)
ungekoppelt

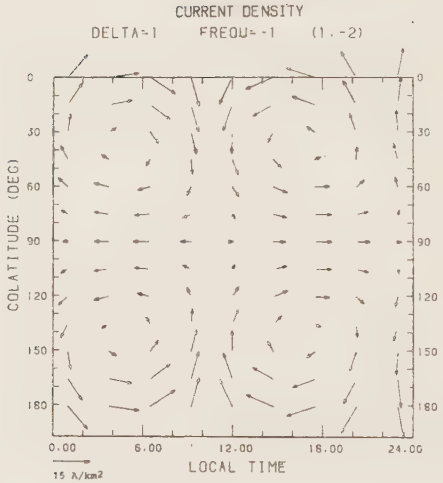


Abb.25

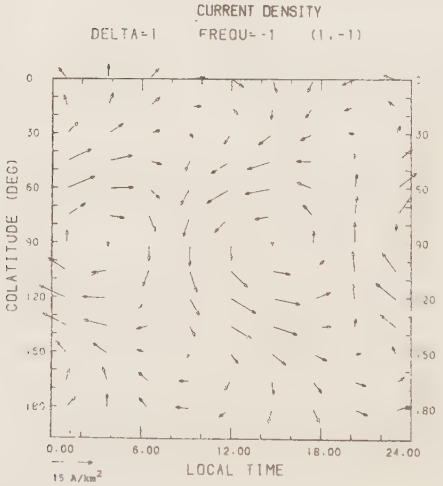


Abb.28

Strom (E-Schicht)
gekoppelt

(1,-2)+

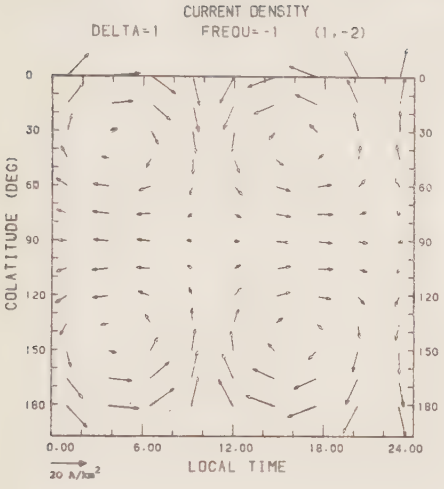


Abb.26

(1,-1)+

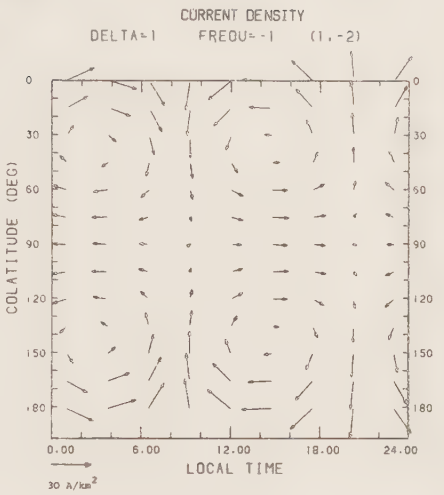


Abb.27

(1,-2)+

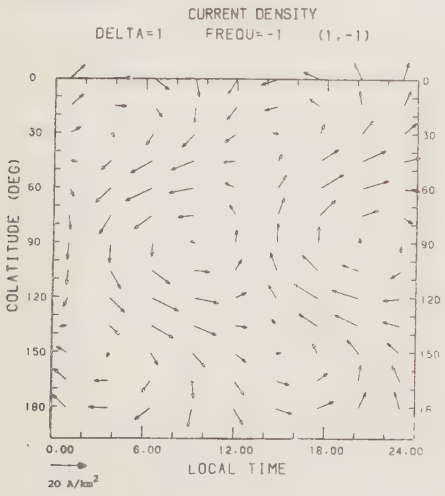


Abb.29

(1,-1)+

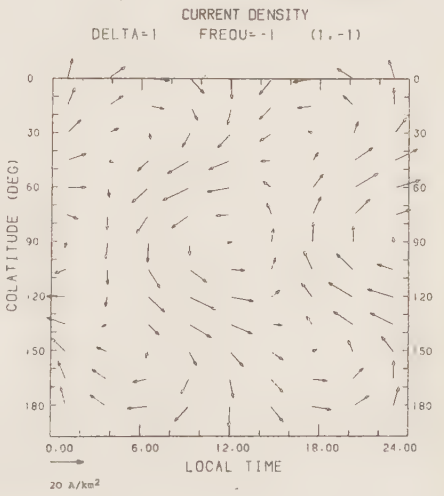


Abb.30

Strom (F-Schicht)
ungekoppelt

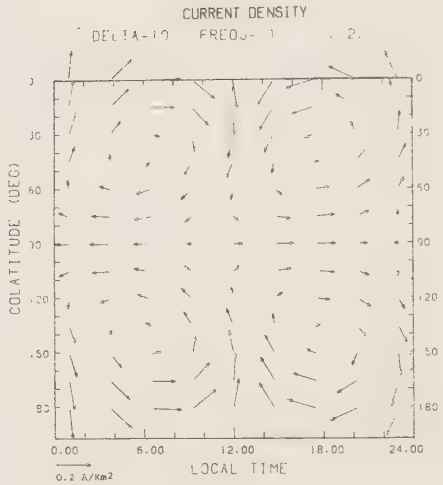


Abb.31

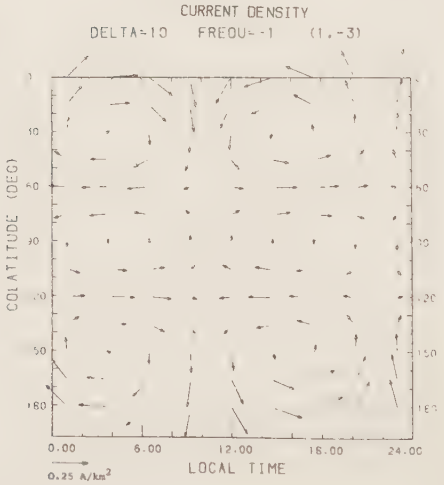


Abb.34

Strom (F-Schicht)
gekoppelt

(1,-2)+

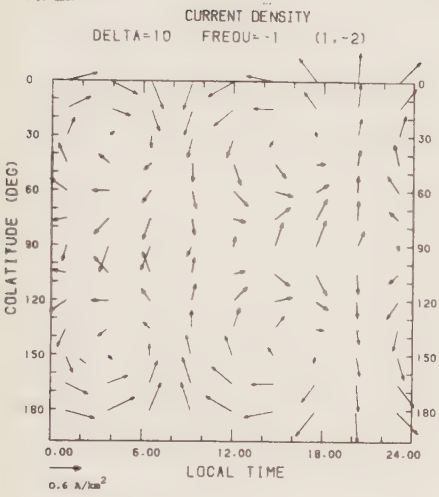


Abb.32

(1,-1)+

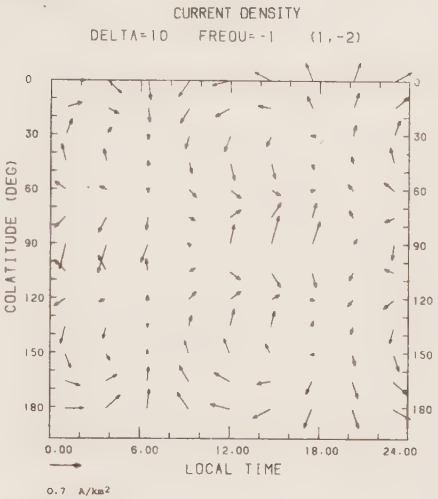


Abb.33

(1,-2)+

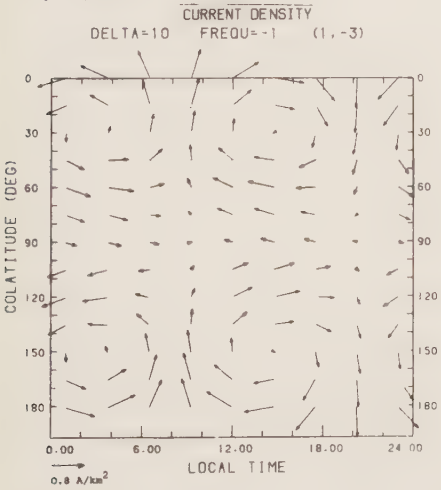


Abb.35

(1,-1)

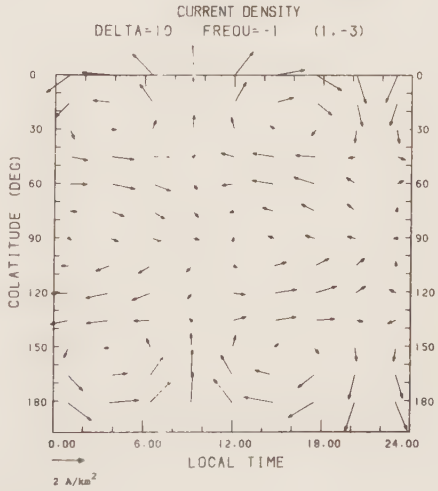


Abb.36

E-Schicht **Elektrisches Feld ungekoppelt** **F-Schicht**

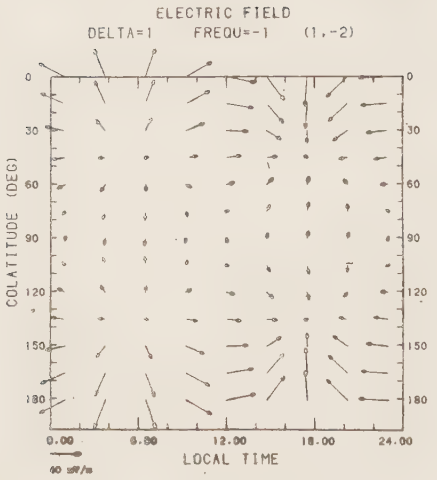


Abb.37

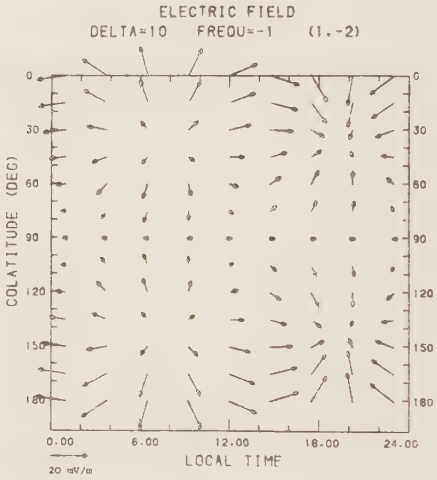


Abb.38

E-Schicht

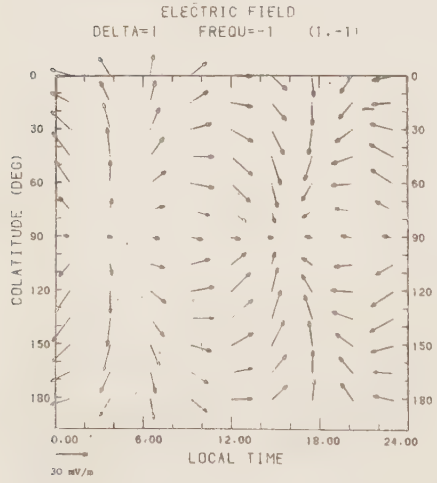


Abb.41

F-Schicht

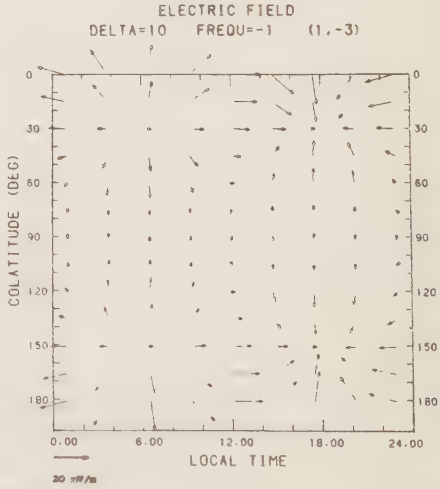


Abb.42

Elektrisches Feld (E- und F-Schicht) gekoppelt

(1,-2)↑ (1,-1)↑

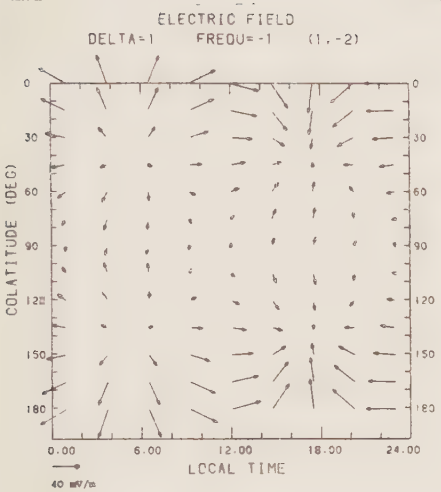


Abb.39

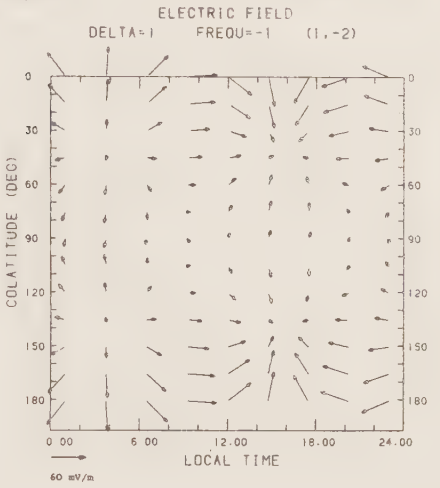


Abb.40

(1,-2)↑ (1,-1)↑

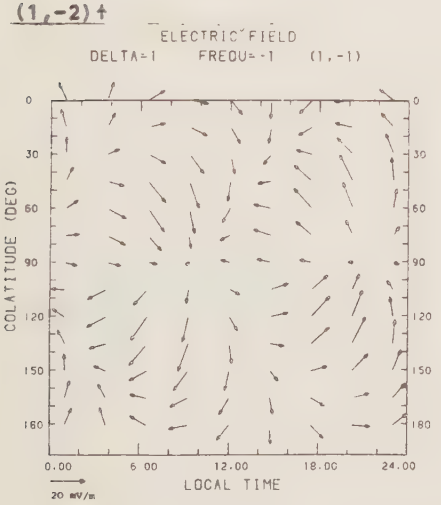


Abb.43

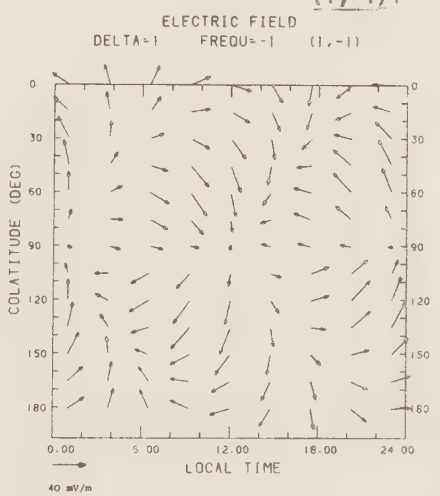


Abb.44

Strom j_B

(1,-2) †

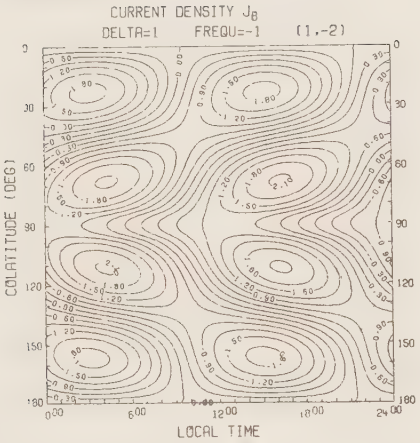


Abb.45: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

(1,-1) †

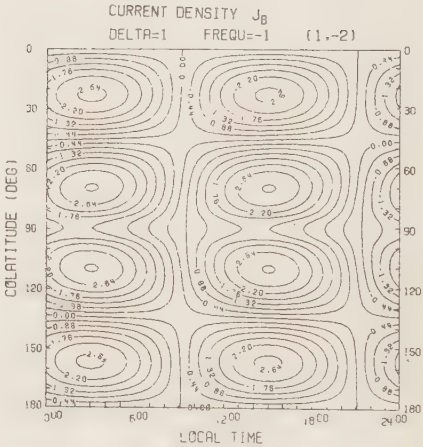


Abb.46: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

(1,-2) †

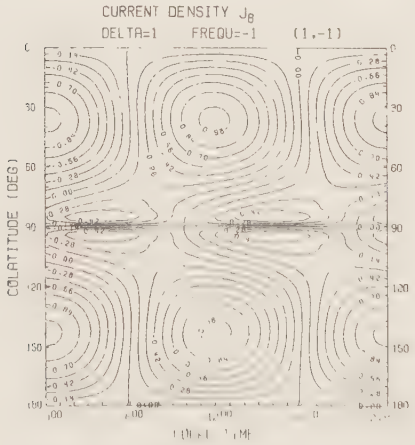


Abb.47: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

(1,-1) †

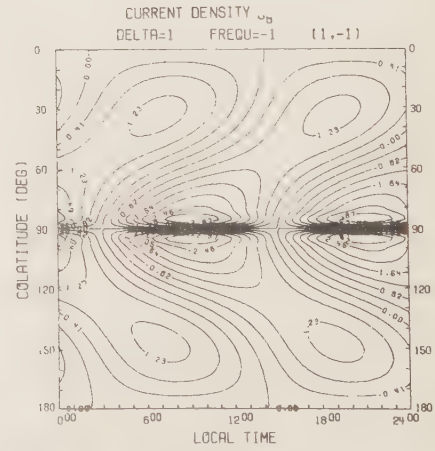


Abb.48: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

Halbtägliche Wellenmoden

Druck (E-Schicht)
ungekoppelt

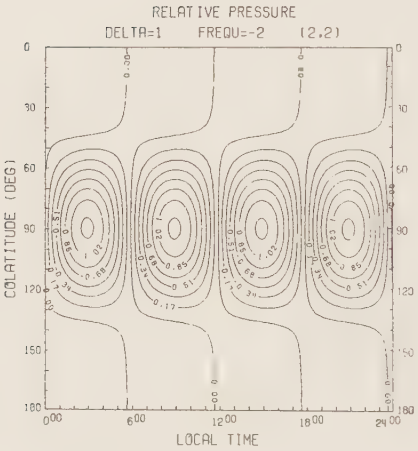


Abb.49: •1

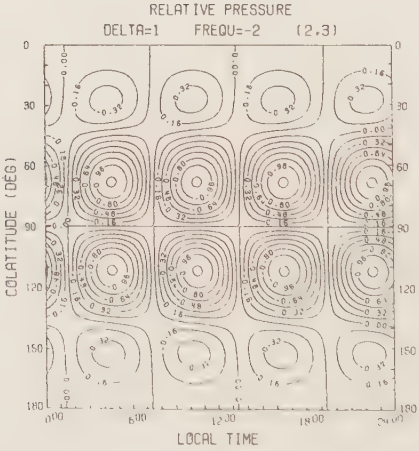


Abb.52: •1

Druck (E-Schicht) gekoppelt

(2,2)↑

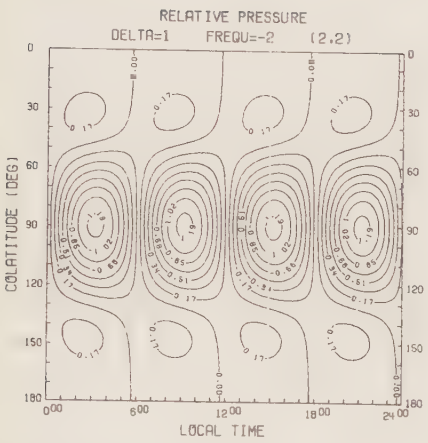


Abb.50: $\cdot 1$

(2,3)↑

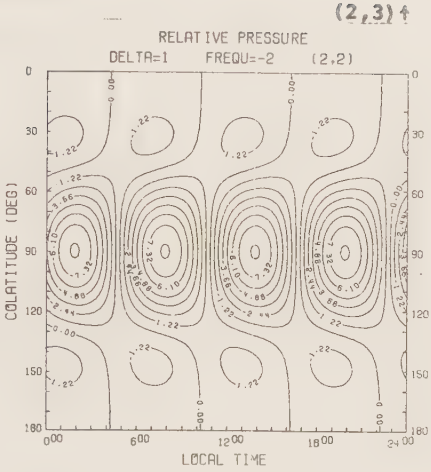


Abb.51: $\cdot 10^{-2}$

(2,2)↑

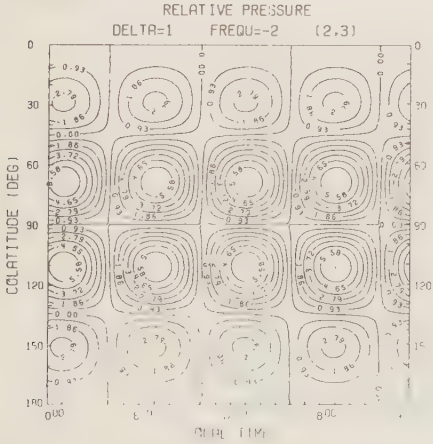


Abb.53: $\cdot 10^{-2}$

(2,3)↑

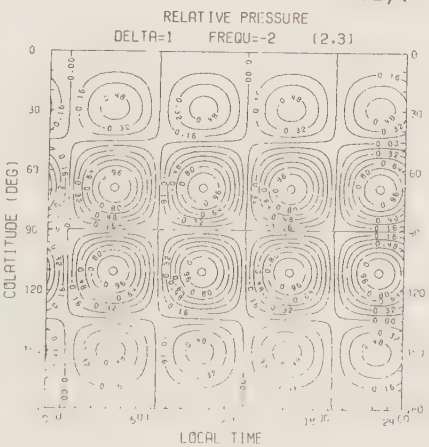


Abb.54: $\cdot 1$

Druck (F-Schicht)
ungekoppelt

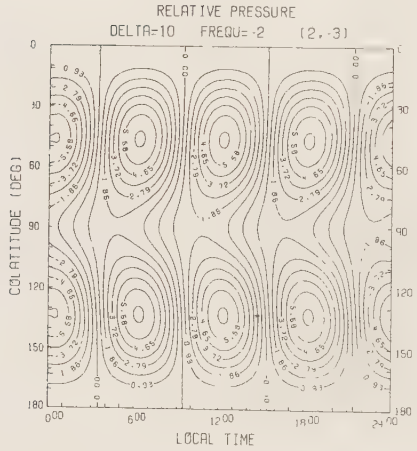


Abb.55: $\cdot 10^{-1}$

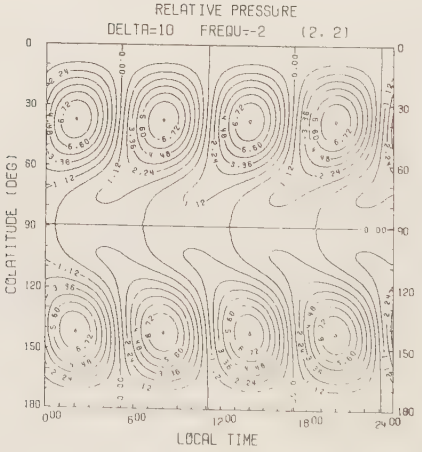


Abb.58: $\cdot 10^{-1}$

Druck (F-Schicht)
gekoppelt

(2,2)†

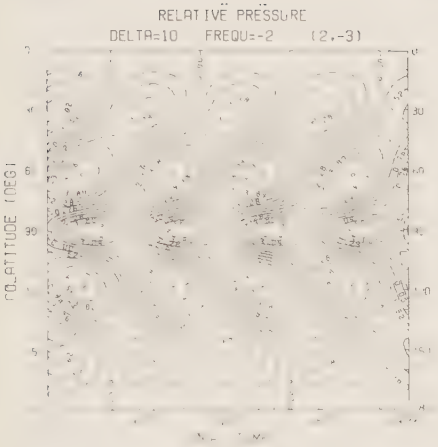


Abb.56: $\cdot 10^{-1}$

(2,3)†

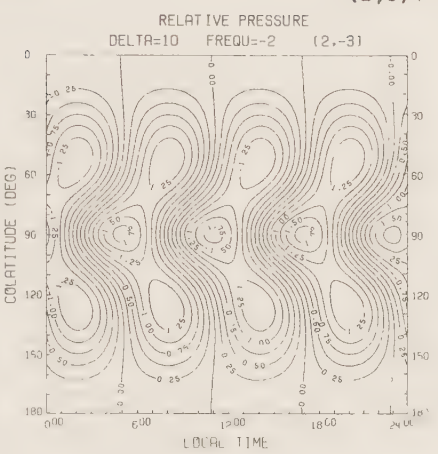


Abb.57: $\cdot 10^{-1}$

(2,2)†

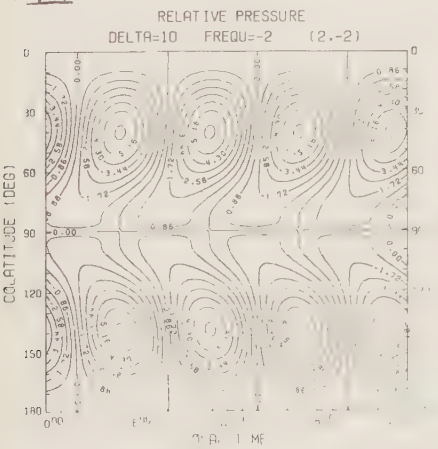


Abb.59: $\cdot 10^{-1}$

(2,3)†

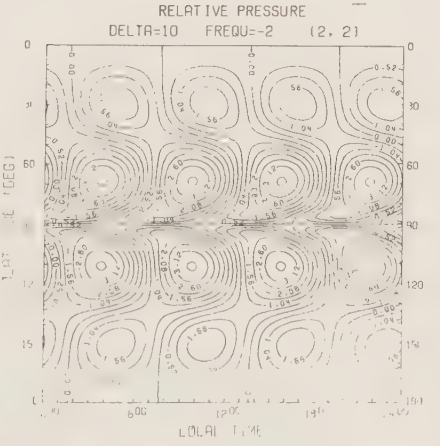


Abb.60: $\cdot 10^{-1}$

Wind (E-Schicht)
ungekoppelt

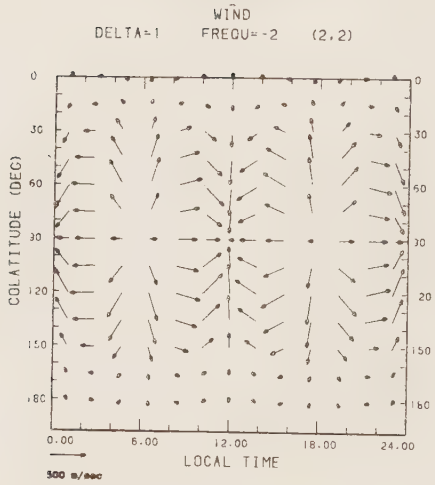


Abb.61

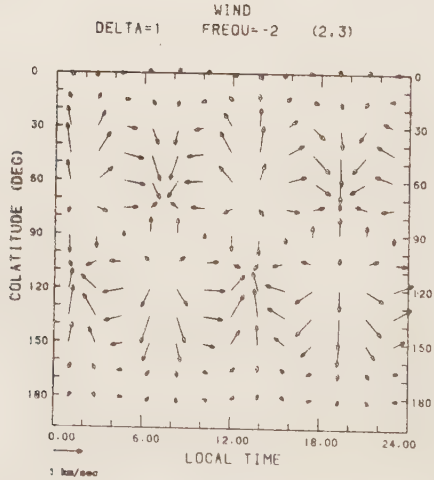


Abb.64

Wind (E-Schicht) gekoppelt

(2,2)↑

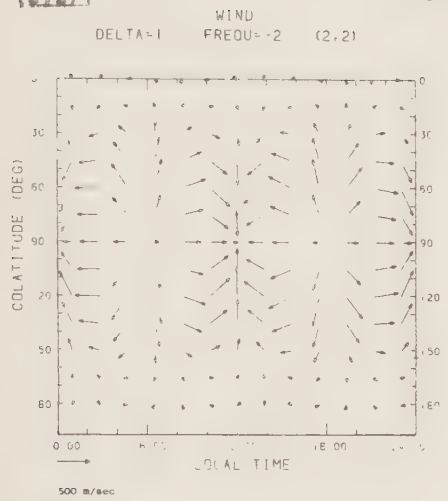


Abb.62

(2,3)↑

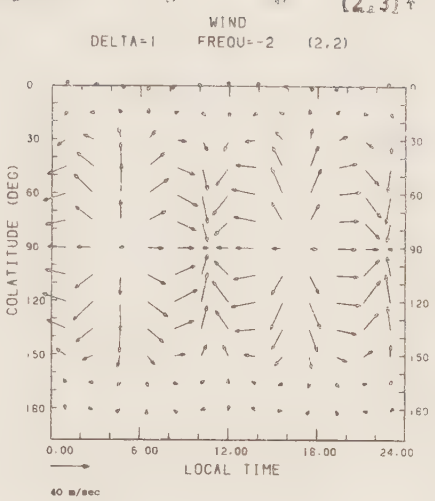


Abb.63

(2,2)↑

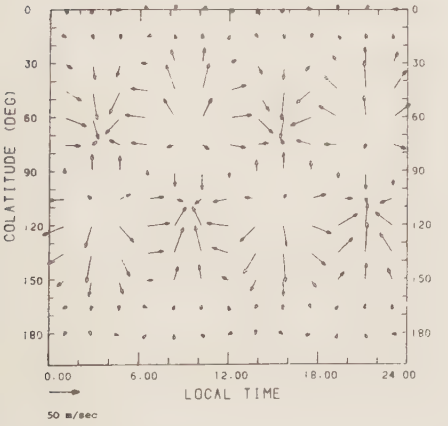


Abb.65

(2,3)↑

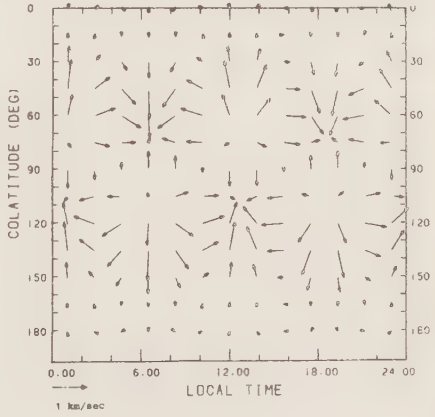


Abb.66

Wind (F-Schicht)
ungekoppelt

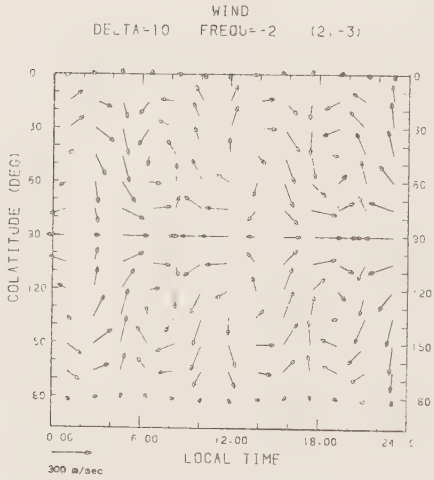


Abb.67

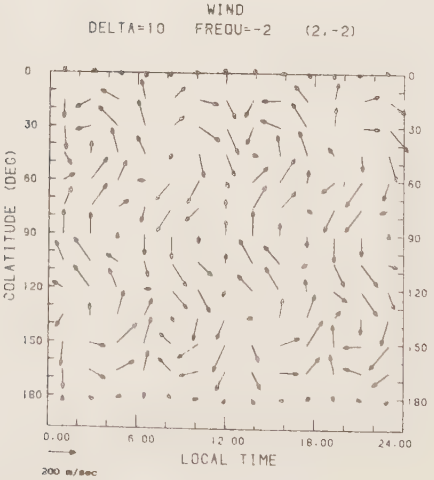


Abb.70

Wind (F-Schicht) gekoppelt

(2,2)↑

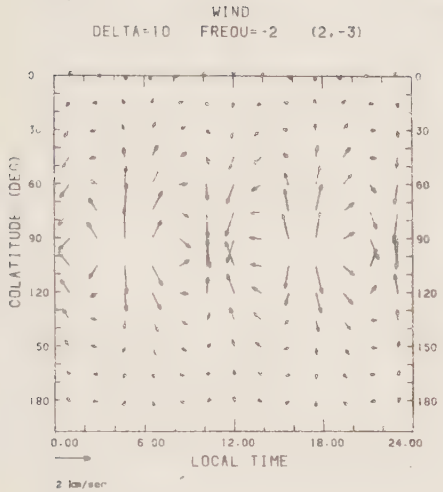


Abb.68

(2,3)↑

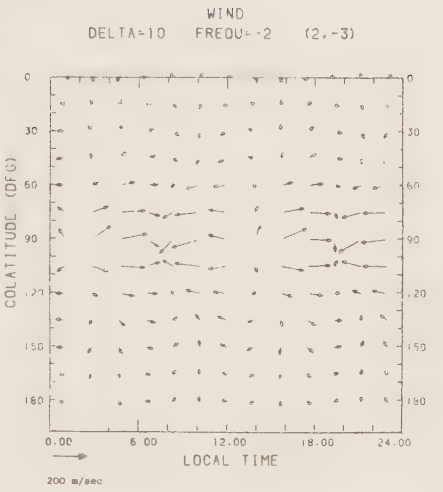


Abb.69

(2,2)↑

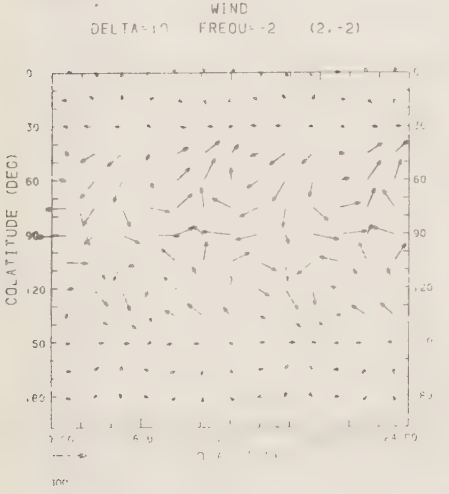


Abb.71

(2,3)↑

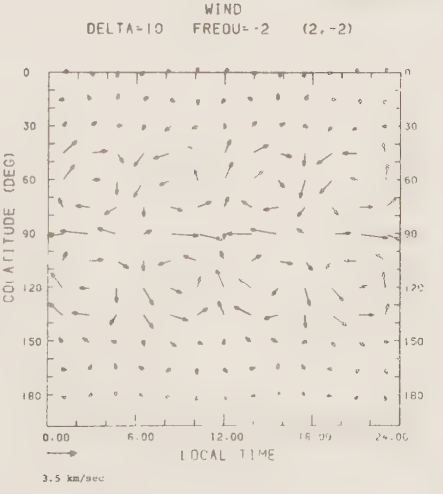


Abb.72

Strom (E-Schicht)
ungekoppelt

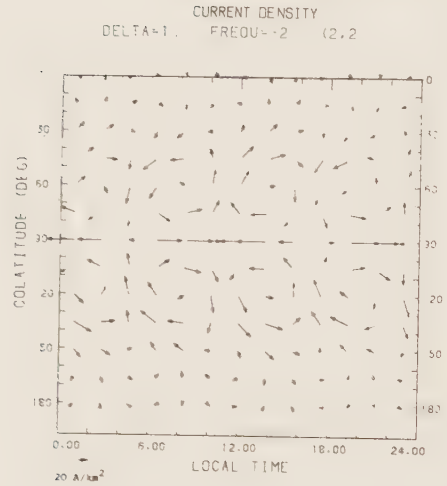


Abb.73

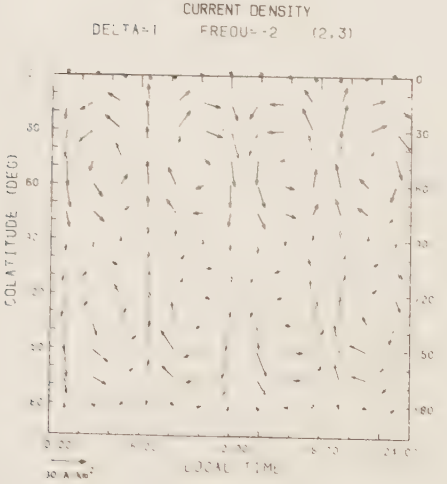


Abb.76

Strom (E-Schicht)
gekoppelt

(2,2)↑

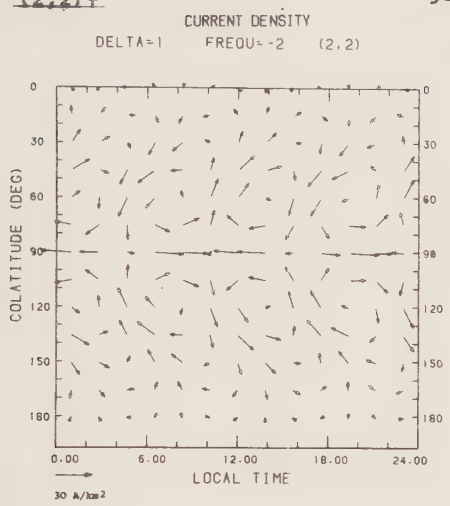


Abb.74

(2,3)↑

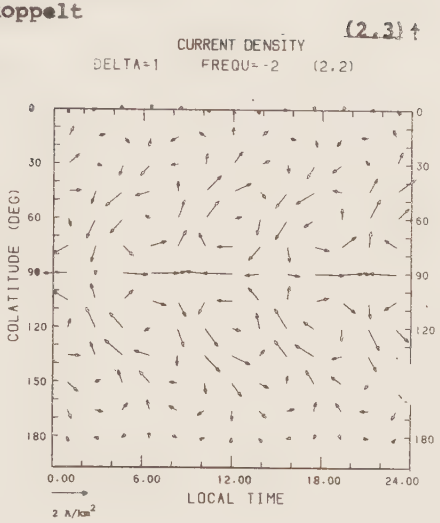


Abb.75

(2,2)↓

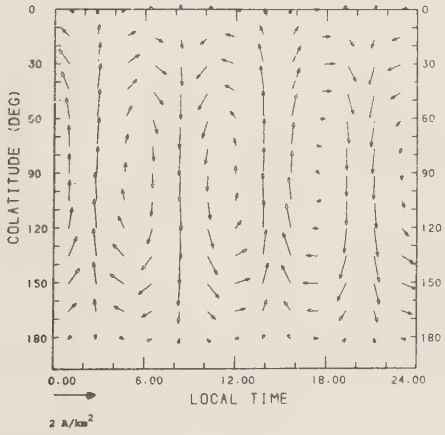


Abb.77

(2,3)↓

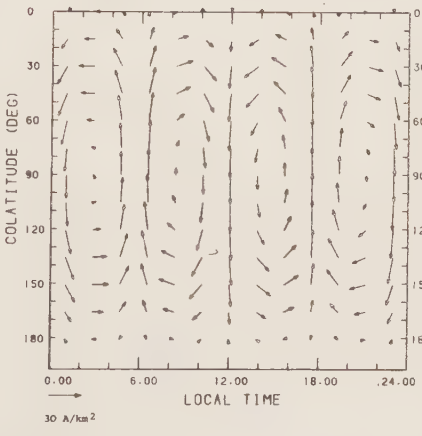


Abb.78

Strom (F-Schicht)
ungekoppelt

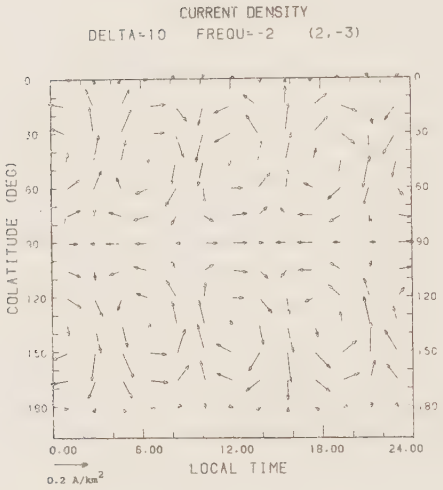


Abb.79

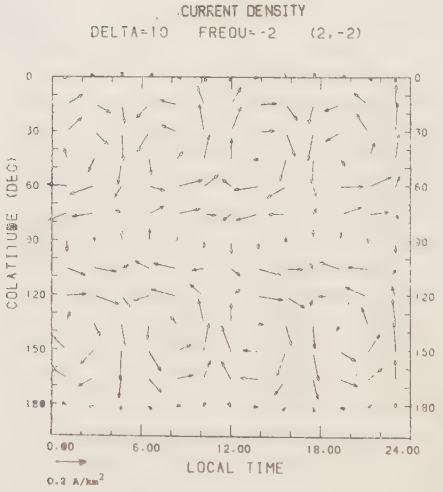


Abb.82

Strom (F-Schicht) gekoppelt

(2,2)+

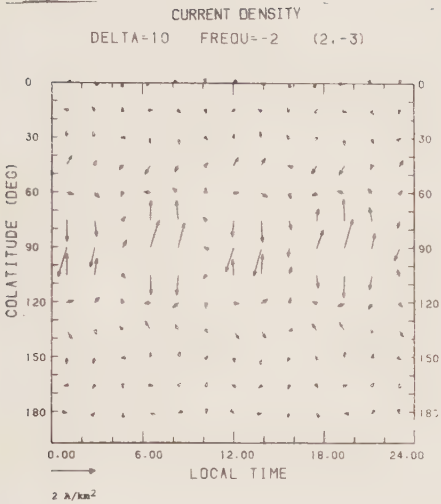


Abb.80

(2,3)+

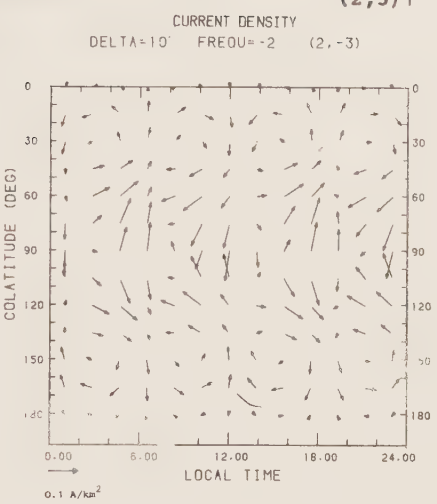


Abb.81

(2,2)+

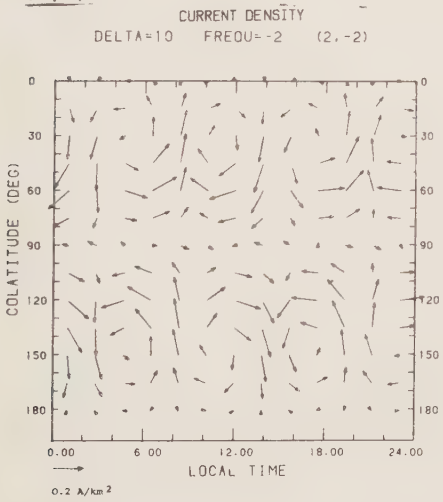


Abb.83

(2,3)+

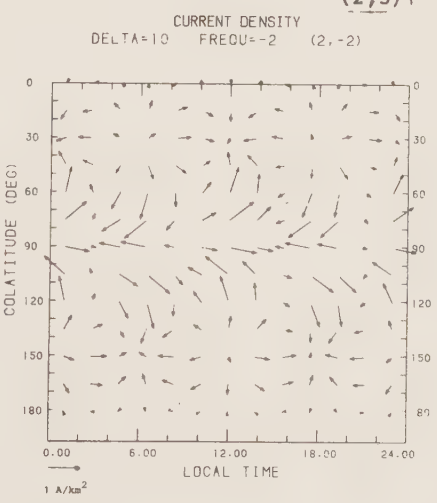


Abb.84

Elektrisches Feld ungekoppelt

E-Schicht

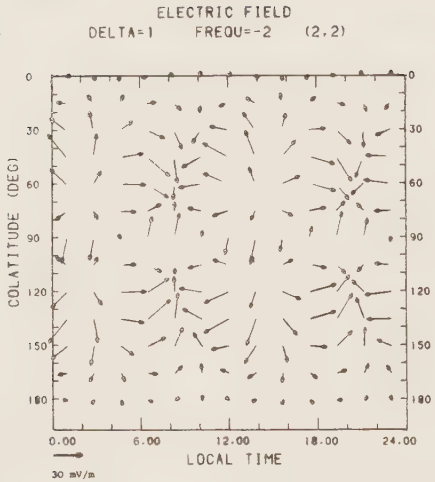


Abb.85

F-Schicht

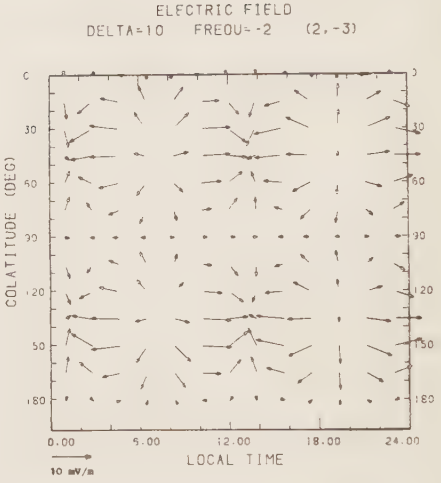


Abb.86

E-Schicht

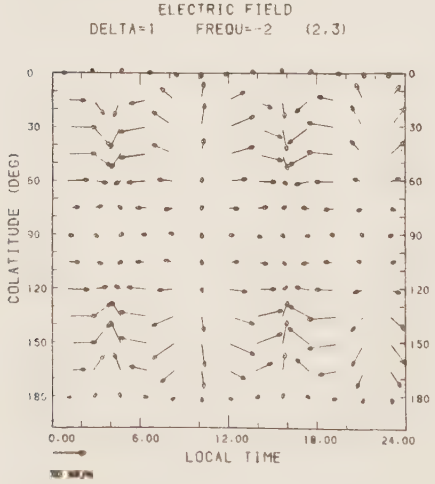


Abb.89

F-Schicht

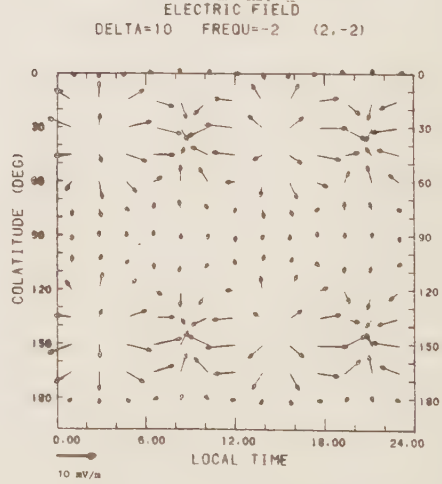


Abb.90

Elektrisches Feld (E-und F-Schicht) gekoppelt

(2,2)↑

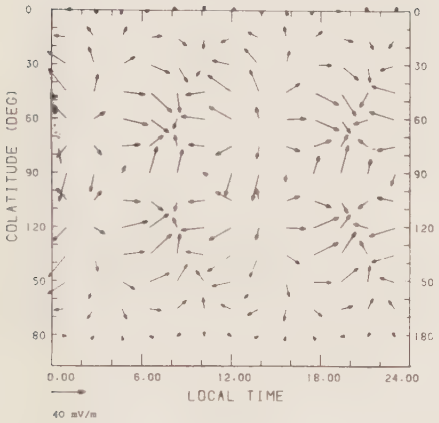


Abb.87

(2,3)↑

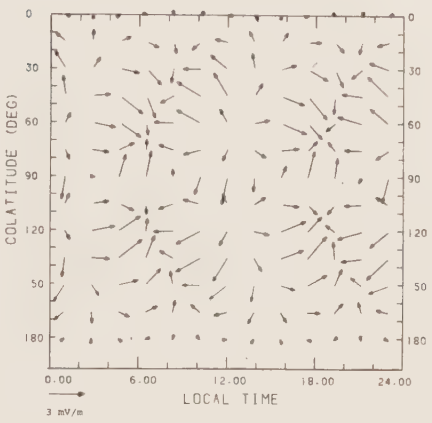


Abb.88

(2,2)↑

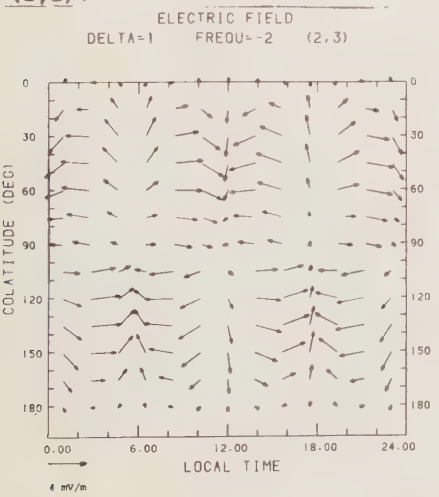


Abb.91

(2,3)↑

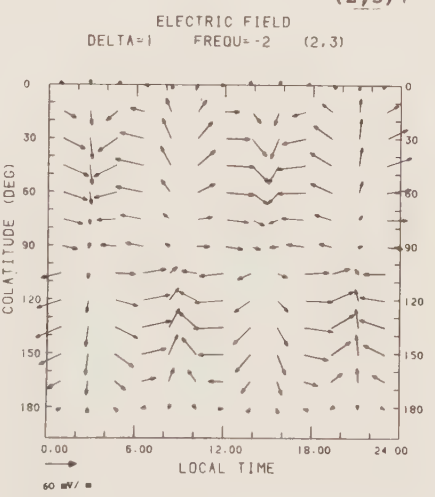


Abb.92

Strom j_B

(2,2) †

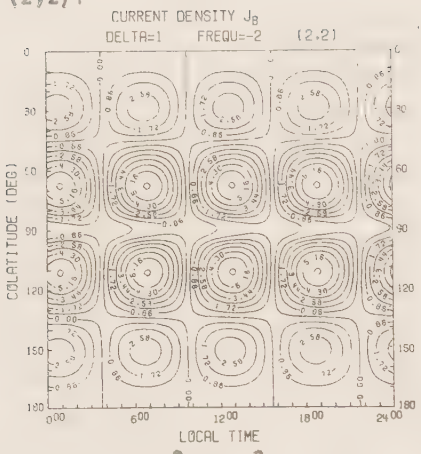


Abb.93: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

(2,3) †

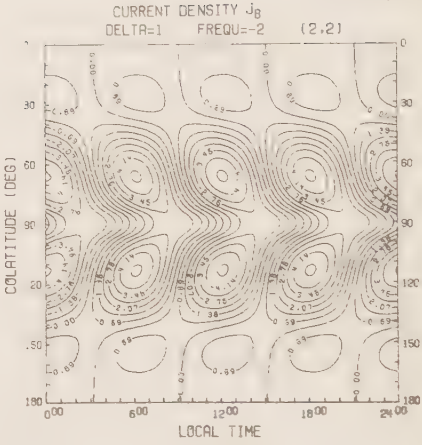


Abb.94: $\cdot 10^{-3}$ A/km^2

(2,2) †

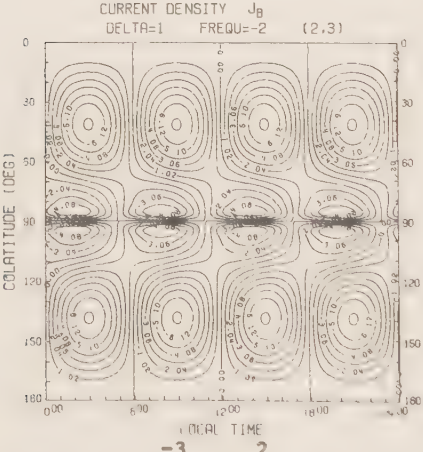


Abb.95: $\cdot 10^{-3}$ A/km^2

(2,3) †

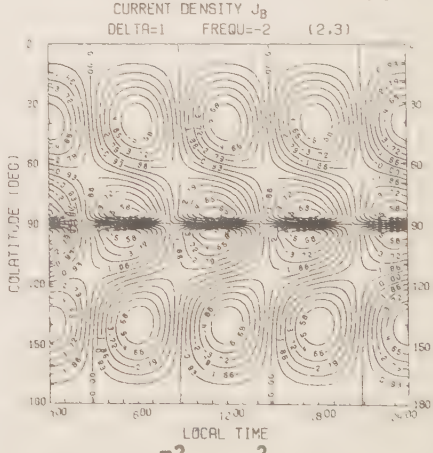


Abb.96: $\cdot 10^{-2}$ A/km^2

Elektrische Potentialfelder

Rotationsfreies elektrische Potential
ungekoppelt

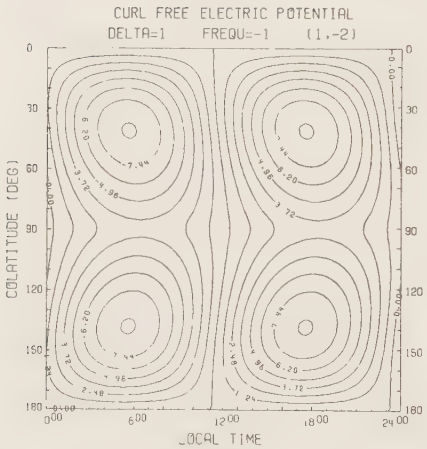


Abb.97: $\cdot 10^4$ V

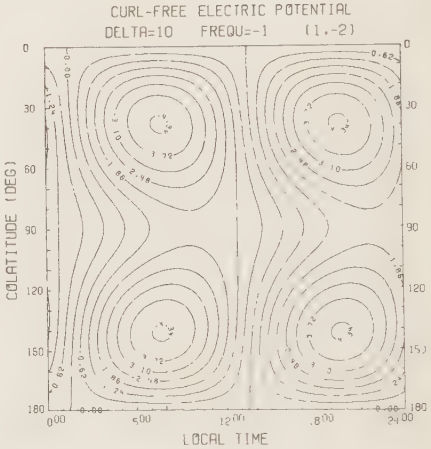


Abb.98: $\cdot 10^4$ V

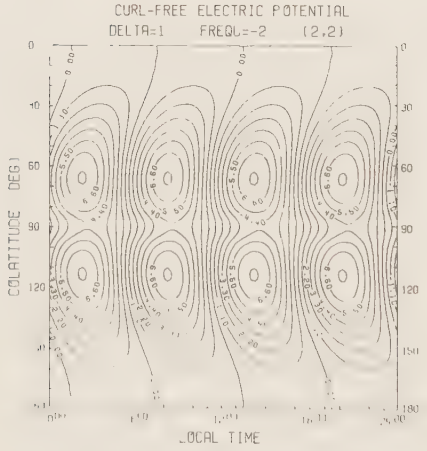


Abb.100: $\cdot 10^4$ V

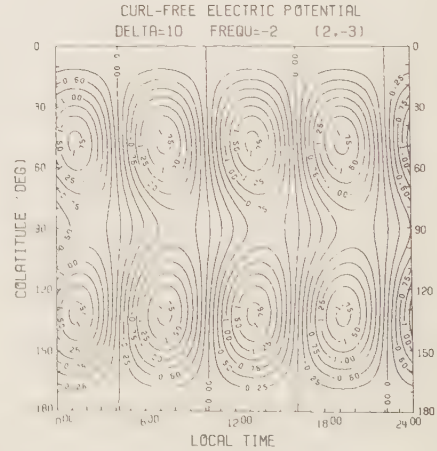


Abb.101: $\cdot 10^4$ V

Rotationsfreies elektrisches Potential gekoppelt (E- und F-Schicht)

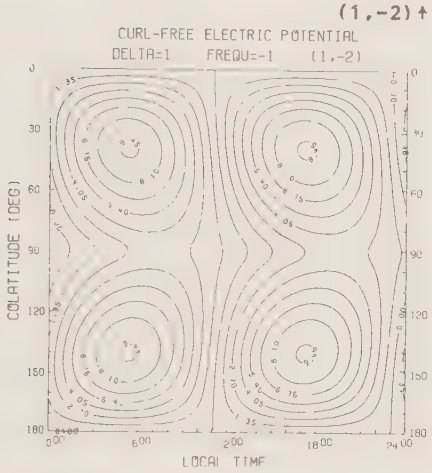


Abb.99: $\cdot 10^4$ V

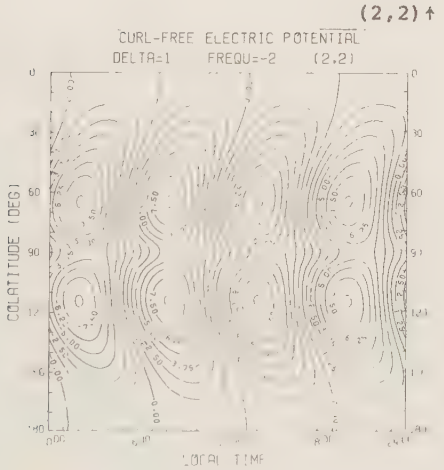


Abb.102: $\cdot 10^4$ V

Quellenfreies elektrisches Potential
ungekoppelt

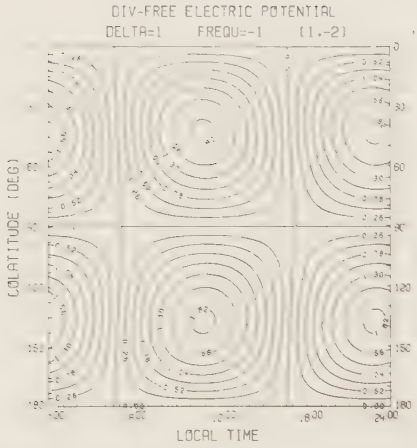


Abb.103: $\cdot 10^4$ V

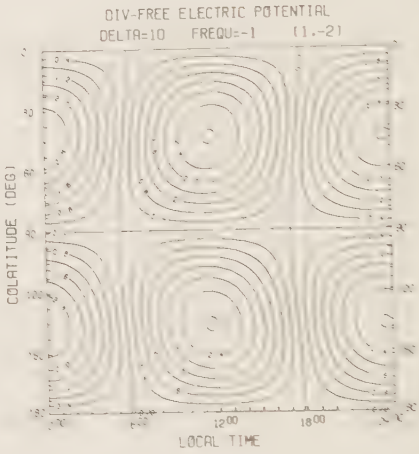


Abb.104: $\cdot 10^2$ V

Abb.106: $\cdot 10^4$ V

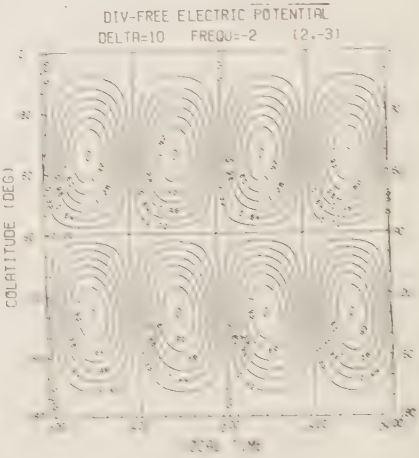


Abb.107: $\cdot 10^2$ V

Quellenfreies elektrisches Potential gekoppelt (E- und F-Schicht)

Abb.105: $\cdot 10^4$ V

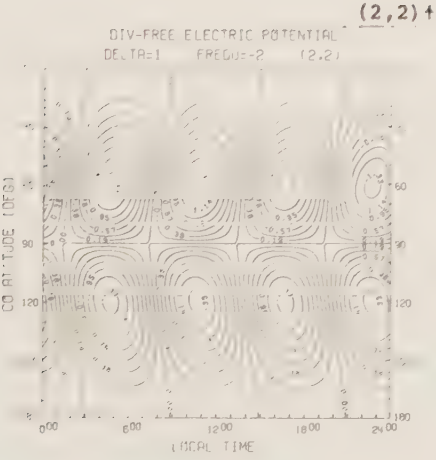


Abb.108: $\cdot 10^4$ V

Literaturverzeichnis

Burrows,K., and S.M.Hall, Rocket measurement of the geomagnetic field above Woomera, South Australia, J.Geophys.Res., 70, 5883, 1965.

Chapman,S.,and J.Bartels, Geomagnetism, Clarendon,Oxford,1951.

Chapman,S.,and R.S.Lindzen, Atmospheric Tides, D.Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1970.

Davis, T.N., P.D.Stoarik, and J.P.Heppner, Rocket measurements of the Sq current at mid-latitudes, J.Geophys.Res., 70, 5883, 1965.

Forbes,J.M., and R.S.Lindzen, Atmospheric solar tides and their electromagnetic effects, I, J.Atmos.Terr.Phy, 38, 897, 1976.

Geisler,J.E., A numerical study of the wind systems in the middle thermosphere, J.Atmos.Terr.Phys., 29, 1469, 1967.

Hays,R.H., R.A.Jones, and M.H.Rees, Auroral heating and the composition of the neutral atmosphere, Planet.Space Sci. 21, 559-573, 1973.

Hong,S.S., and R.S.Lindzen, Solar semidiurnal tide in the thermosphere (abstract), EOS Trans. AGU, 56, 412,1975.

Jacchia,L.G., and J.Slowey, The space and location of the diurnal bulge in the upper atmosphere, Space Research VII, 1077, 1967.

Jacchia,L.G., Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles, Spec.Rep.332, Smithson.Astrophys., Observ., Cambridge, Mass., 1971.

Jones,M.N., Atmospheric oscillations, 2, Planet.Space Sci., 19, 609, 1971.

Kato,S., Diunal atmospheric oscillations, J.Geophys.Res., 71, 3201-3214, 1966.

Kato,S., and S.Matsushita, A consideration on the tidal wave transmission through the ionized atmosphere, J.Geomagn.Geoelec., 21, 471, 1969.

Kato,S., Wave dynamics in the thermosphere, 1, Tidal motion, Space Sci.Rev. , 12, 421, 1971.

Kohl,H., und J.W.King, Atmospheric winds between 100 km and 700 km and their effects on the ionosphere, J.Atmos.Terr.Phys., 29, 1045, 1967.

Lindzen,R.S., On the theory of the diurnal tide, Mon.Weather Rev., 94, 259-301, 1966.

Longuet-Higgins,M.S., The eigenfunctions of Laplace's tidal equation over a sphere, Phil.Trans.Roy.Soc.London, 262, 511-607, 1968.

Love,A.E.H., Notes on the dynamical theory of the tides, Proc.Math.Soc.London, 12, 309, 1913.

Maeda,K., and S.Kato, Electrodynamics of the ionosphere, Space Sci.Rev., 5, 57, 1966.

Martyn,D!F., Phil.Trans.Roy.Soc.,London A246, 306, 1953.

Mayr,H.G., I.Harris, and H.Volland, Theory of the phase anomaly in the thermosphere, J.Geophys.Res., 78, 7480-7489, 1973.

Mayr,H.G., and I.Harris, Thermospheric dynamics, 2, Temperature, composition, and Winds, submitted to J.Geophys.Res., 1976.

Murata,H., Dynamic effects of charged particles on atmospheric tides, J.Geomagn.Geoelec., 25, 15-26, 1973.

Ralston, A., A first course in numerical analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

Richmond,A.D., S.Matsushita, and D.D.Tarpley, On the production mechanism of electric currents and fields in the ionosphere, J.Geophys.Res., 81, 547, 1976.

Rishbeth,H., Polarization fields produced by winds in the equatorial F-region, Planet.Space Sci., 19, 357,1971.

Siebert,M., Atmospheric tides, Advan.Geophy., 7, 105-187, 1961.

Stening,R.J., An assessment of the contributions of various tidal winds to the Sq current system, Planet.Space Sci., 17, 889, 1969.

Tarpley,J.D., The ionospheric wind dynamo, 2, Planet.Space Sci., 18, 1091, 1970.

Volland,H., Solutions of Laplace's tidal equation for complex frequencies, J.Atmos.Terr.Phys., 36, 445, 1974.

Volland,H., Coupling between the neutral tidal wind and the ionospheric dynamo current, J.Geophys.Res., 81, 1621, 1976.

Volland,H., and Mayr,H.G., Theoretical aspects of tidal and planetary wave propagation at thermospheric heights, Rev.Geophys.Space Phys., 15, 203-226, 1977.

Volland,H., and Grellmann,L., A hydromagnetic Dynamo of the Atmosphere, J.Geophys.Res., 83, 3699, 1978.

Whitten and Poppoff, Fundamentals of Aeronomy, Space Science Text Series, J.Wiley a. Sons, New York, 1971.

Danksagung

Herrn Prof.Dr.O.Hachenberg danke ich für die sehr guten Arbeitsbedingungen am Institut für Radioastronomie.
Herrn Prof.Dr.H.Volland gilt mein Dank für sein reges Interesse am Fortgang dieser Arbeit und seine stete hilfreiche Diskussionsbereitschaft.
Dem Max-Planck-Institut für Radioastronomie in Bonn verdanke ich die Möglichkeit, das außerordentlich zeitintensive Programm an der Cyber 172 zu rechnen, ohne die die vorliegende Arbeit nicht hätte vollendet werden können.
Nicht zuletzt danke ich meiner Frau, daß sie mir die mühevolle und zeitraubende Reinschrift dieser Arbeit abgenommen hat.

Lebenslauf

Am 21.1.1944 wurde ich als Sohn des Glasermeisters Arthur Grellmann und seiner Ehefrau Gertrud in Gummersbach (Oberbergischer Kreis) geboren.

1951 wurde ich in die damalige Evangelische Volksschule zu Derschlag eingeschult. Nach vierjährigem Besuch wechselte ich über zur Realschule Bergneustadt, die ich 1958 verließ, um das dortige Wüllenweber Aufbau-Gymnasium zu besuchen.

Dort absolvierte ich im März 1964 das Abitur.

Im Sommersemester 1964 begann ich mit dem Studium der Physik an der Universität zu Köln, wo ich 1971 die mündliche Diplomprüfung ablegte.

Nach Anfertigung einer Diplomarbeit mit dem Titel " Die Reaktion $^{16}O(p,\alpha)^{13}N$ und ihre astrophysikalische Bedeutung" am Institut für Kernphysik der Uni Köln erreichte ich im Dezember 1973 das Diplom.

Von April 1974 bis Januar 1976 unterrichtete ich als nebenberufliche Lehrkraft am Hildegard von Bingen-Gymnasium in Köln in den Fächern Physik und Mathematik.

Seit Februar 1976 bin ich als Doktorand am Institut für Radioastronomie der Universität Bonn tätig.

Am 1.9.1979 trat ich in den Vorbereitungsdienst für das Lehramt am Gymnasium am Bezirksseminar Siegen.